

Fjörtoft 圖解方法的一些統計研究*

丑紀範 廖翔雲

(中央氣象科學研究所)

一. 引 言

在缺乏電子計算機的條件下，如果要把數值預報方法應用到日常天氣預報工作中去的話，Fjörtoft (1952) 提出的正壓渦度方程的圖解積分方法是有實際意義的。這方法的主要精神是：在計算渦度平流時，引進平均流場(\bar{H} 場)代替實際流場(H 場)作推移場而一次推 12 或 24 小時，因而大大減少了所需的運算，在由渦度變化計算變高時，應用所推得的 Poisson 方程的近似圖解積分公式，這方法按其簡便迅速來說，已可以供日常預報應用，並且還可以推廣到許多別的情形，不過在這樣做之前，我們有必要先弄清楚這個方法究竟近似到何種程度。

弄清計算方法的近似程度的最自然的辦法是進行實際驗證，不過在驗證時必需避免由於與問題無關的因素而帶來的偏差。本文就是從實際資料中考查 \bar{H} 場隨時間的變化情況及其對推移場的影響以確定應用它的近似程度，同時利用 24 小時實際渦度變化按圖解積分公式所算得的變高與實際的變高比較以確定該公式的近似情況。如所周知，我們問題的解答與差分網格的大小有密切關係，以下的結果都是在網格為 600 仟米的前提下得

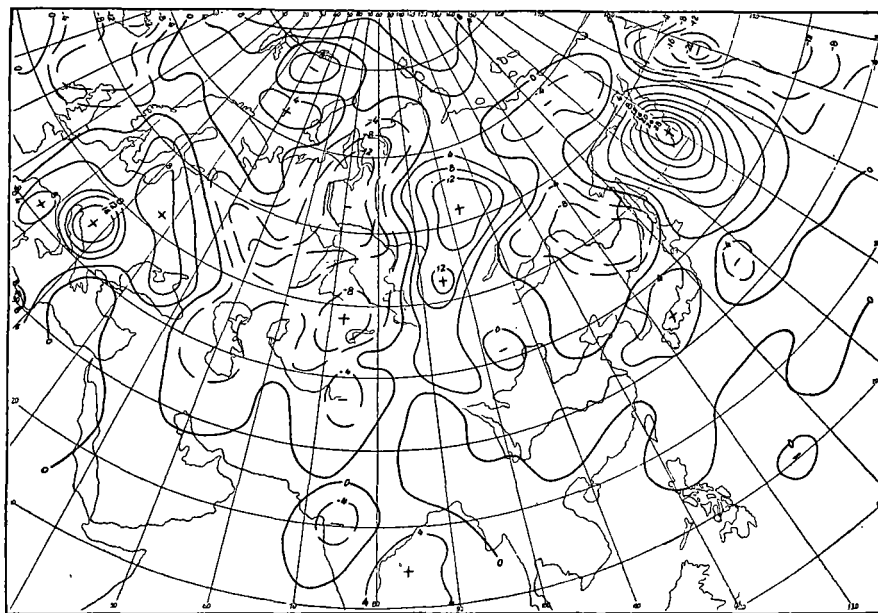


圖 1a. 1956, 10, 21—22 ΔH_{24}

* 1957 年 11 月 4 日收到。

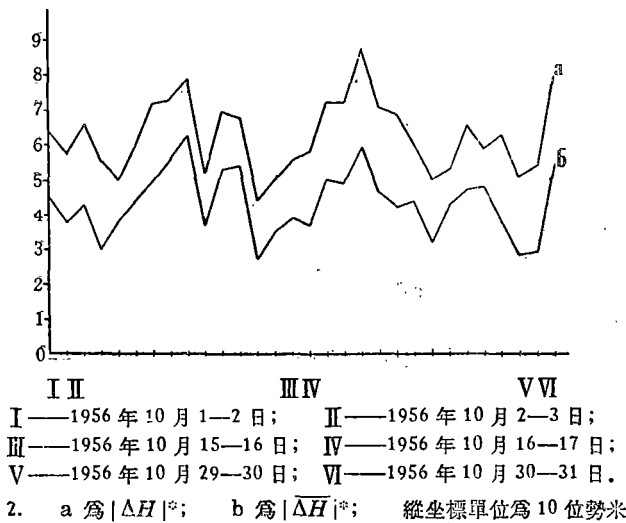
由這表可看出 $\overline{\Delta H}$ 的中心強度約為 ΔH 的二分之一。

爲了更清楚的比較 ΔH 與 $\overline{\Delta H}$ ，我們在圖上均勻選出一系列的點，讀下這些點的 ΔH 及 $\overline{\Delta H}$ 的數值，然後求出：

$$|\Delta H|^* = \frac{1}{n} \sum |\Delta H|,$$

$$|\overline{\Delta H}|^* = \frac{1}{n} \sum |\overline{\Delta H}|,$$

用來表示 H 及 \overline{H} 場的變化強度。其結果如圖 2 所示，縱坐標爲 $|\overline{\Delta H}|^*$ 和 $|\Delta H|^*$ ，橫坐標爲日期。



由圖看出 $|\overline{\Delta H}|^*$ 與 $|\Delta H|^*$ 的比例平均約爲 2/3，這就是說 \overline{H} 場的變化強度約爲 H 場的變化強度的 2/3。

以上就是 \overline{H} 場變化的情況。不過我們最關心的是把它看作不變來推移究竟帶來多大的誤差。由於 \overline{H} 場的具體變化過程無法知道，也就是無法知道真正的渦度平流數值，所以不可能找出嚴格的誤差大小來。我們作這樣的近似處理，一方面用這時刻的 \overline{H} 場推 24 小時而算得渦度平流，另一方面又用 24 小時後的 \overline{H} 場來推。把這兩個結果平均所得數值近似地看作真正數值，那麼我們就可以算出絕對誤差和相對誤差了。按這樣的方法我們作了 10 月 15 日至 10 月 25 日的情況。看出各天差別大小很不相同。這是很自然的。圖 3 可表示一般情況。

對於每天的偏差我們選出一些點來，每點的相對誤差如前所述可近似求出，以橫坐標表示相對誤差，縱坐標表示在各相對誤差間隔內的點數的百分頻率，其結果如圖 4 所示。

三. 關於圖解積分公式

我們所用的 Fjörtoft 圖解積分公式是

$$\Delta H = -(\Delta \xi + 2\overline{\Delta \xi}), \quad (1)$$

以下就是要來考察它的近似程度。選了 1956 年 2 月 1 日 23 時至 29 日 23 時以及同年 10

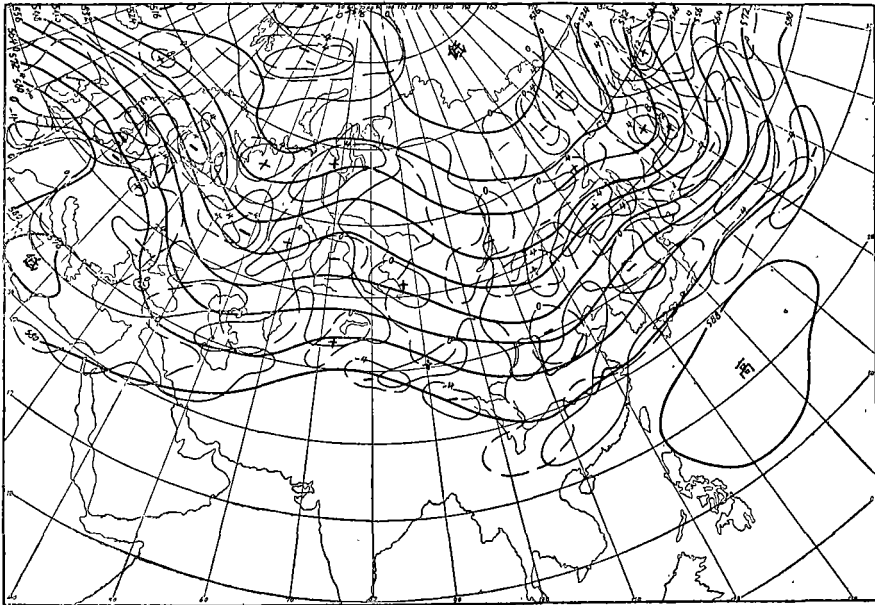


圖 3a.

粗實綫爲 21 日 \bar{H} ; 虛綫爲 21 日 $\bar{H}-H$; 細實綫爲 21 日 \bar{H} 場推 21 日 $(\bar{H}-H)$ 24 小時後的位置

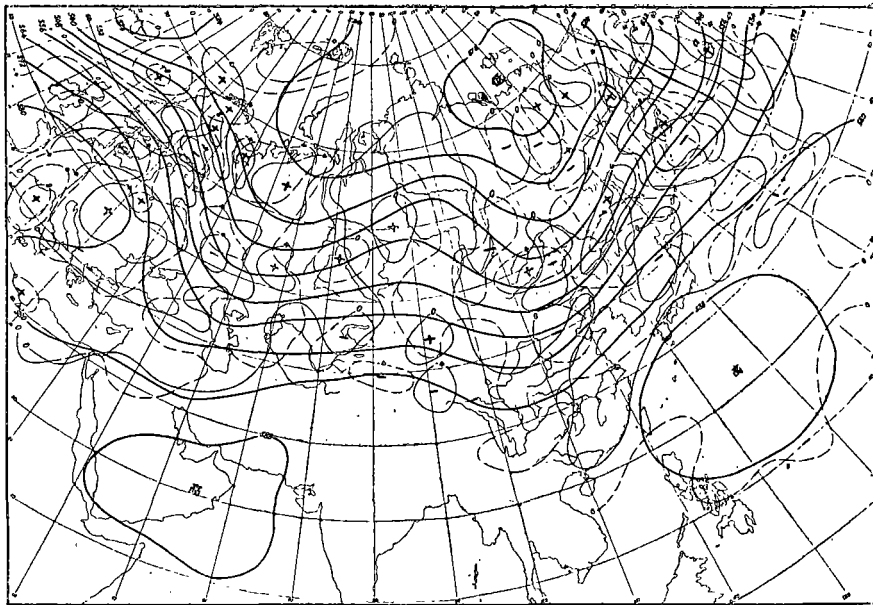


圖 3b.

粗實綫爲 22 日 \bar{H} ; 虛綫爲 21 日 $\bar{H}-H$; 細實綫爲 22 日 \bar{H} 場推 21 日 $(\bar{H}-H)$ 24 小時後的位置

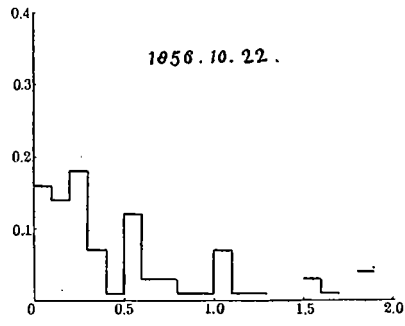
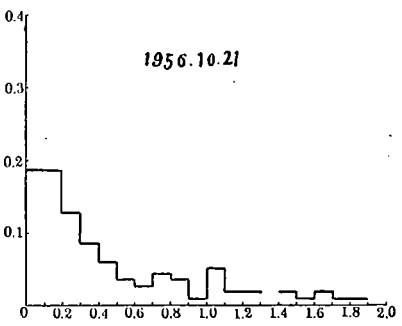
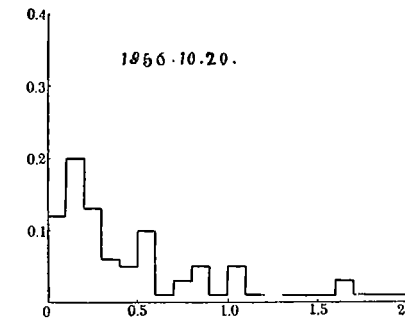
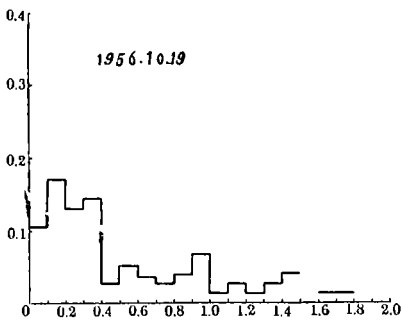
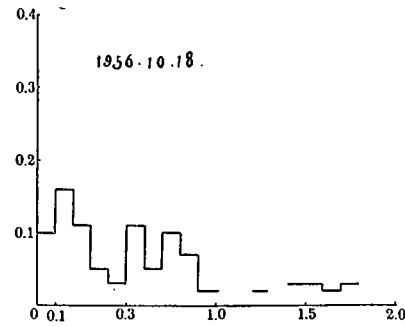
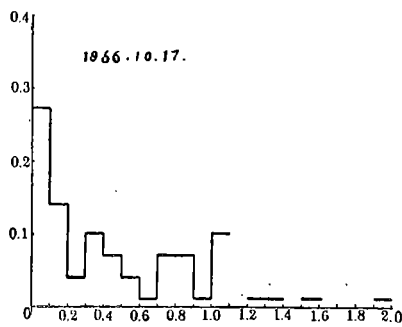
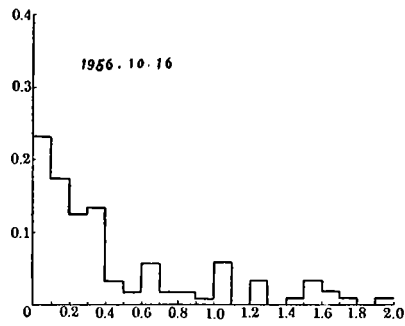
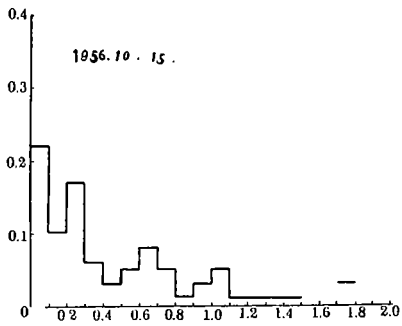


圖 4

月 1 日 23 時至 31 日 23 時共六十天來作試驗。作出每天的 $\bar{H}-H$ 圖，然後作出它的 24 小時變化(即 $\Delta\xi$)，代入(1)式可計算出 ΔH ，把它和實況進行比較，下面是得到的結果。

首先看出這個公式的近似情形並不穩定，作為例子我們給出 2 月 17—18 日及 2 月 7—8 日的情況如圖 5 及圖 6 所示。

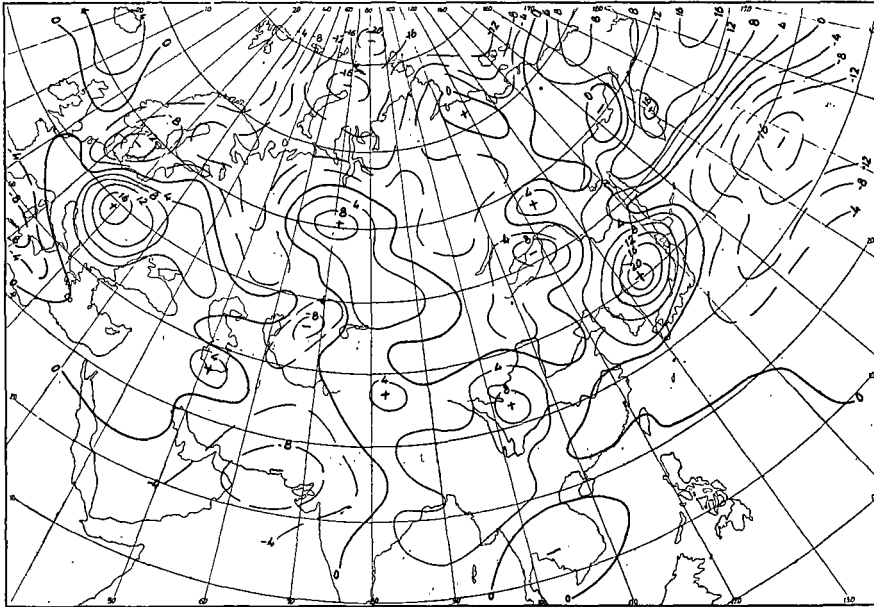


圖 5a. 1956 年 2 月 17 日至 18 日 ΔH_{24}

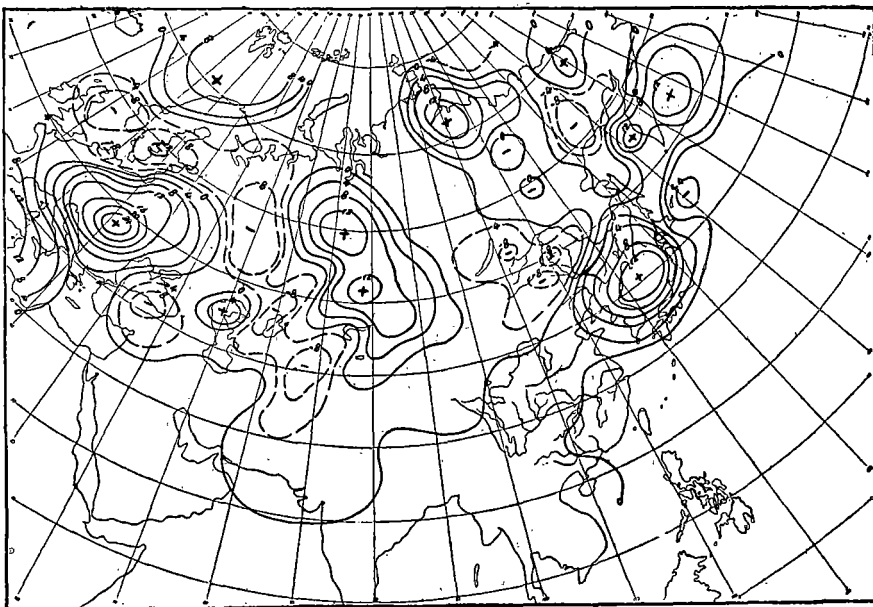


圖 5b. 1956 年 2 月 17 日至 18 日 $-(\Delta\xi + 2\Delta\xi)$

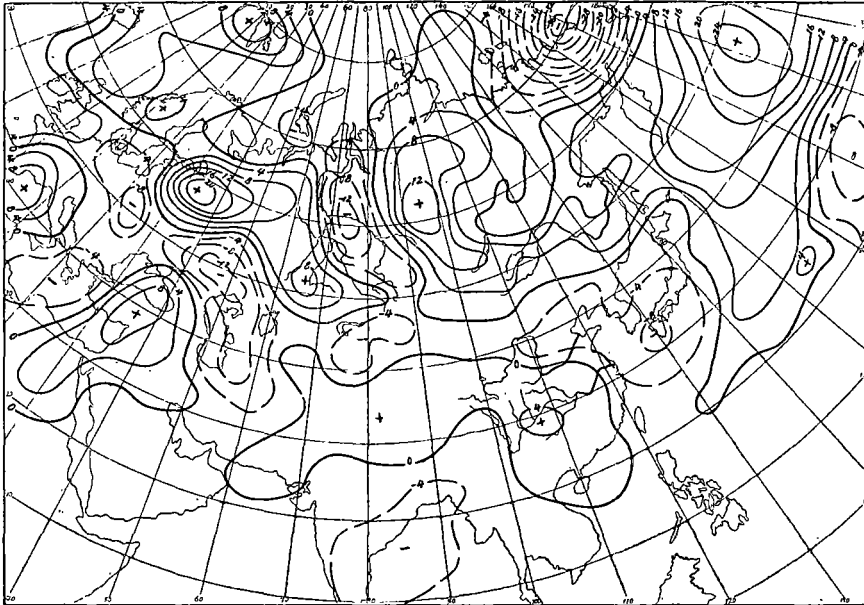


圖 6a. 1956 年 2 月 7 日至 8 日 ΔH_{2a}

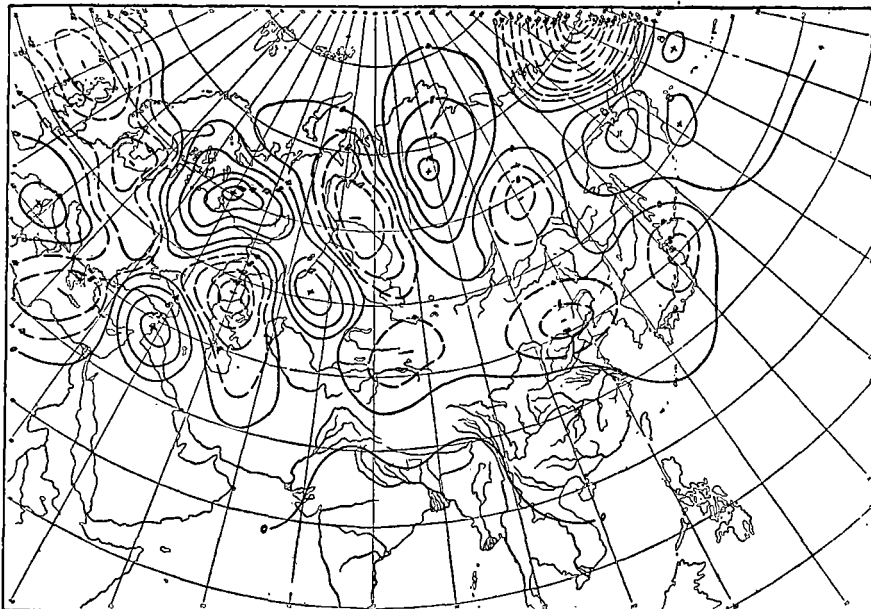


圖 6b. 1956 年 2 月 7 日至 8 日 $-(\Delta\xi + 2\overline{\Delta\xi})$

圖 6 是較好的而圖 5 則是較差的。

按全部 58 次看來零綫偏差一般不大，中心強度偏差大都在 ± 40 位勢米左右，中心位置偏差不大，不過等值綫形狀則出入頗大。就百分誤差說，在 $|\Delta H|$ 大時要小些，這是容易理解的。

最普通的反映近似程度的指標是相關係數。在以網格點為對象的計算方法中，可用所取的點來計算相關係數。在圖解法的情形，產生了如何選點的問題。我們根據幾個例子用幾種不同的選點方法計算相關從而確定了有代表性的選點方法，然後再按所確定的選點方法計算了每天的計算值與觀測值之間的相關係數。圖 7 給出相關係數的百分頻率分佈。易見並不太集中。在所算 58 次中有 55% 大於 0.80。將 58 次視為總體則得到相關係數為 0.774 (與每天的相關係數的算術平均值幾乎一樣)。

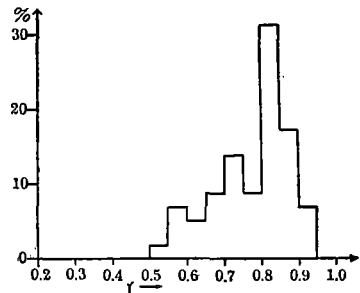


圖 7

應用最小二乘法來求計算值與實際值之間的迴歸方程：

$$\text{設} \quad Y = a + bX, \quad (2)$$

這裏 X 表示計算值 $-(\Delta\xi + 2\overline{\Delta\xi})$ ，

Y 表示實際值 (ΔH) 。

求得係數如表 2，由表 2 可見迴歸方程的斜率相當不穩定，就其平均數而言亦不是 1，偏角在 55° 左右。其次 a 和 $\Sigma\Delta H_{2d}$ 基本上同號(只有一次例外)。

在蘇聯短期預報手冊上提出下面經驗關係：

$$\Delta H = -m\Delta\xi, \quad (3)$$

這裏 m 與網格大小 d 有關。

我們求 ΔH 與 $\Delta\xi$ 之間的迴歸方程：

$$\text{按} \quad Y = a + bX, \quad (4)$$

X 為 $-\Delta\xi$ ，

Y 為 ΔH ，

得表 3。

表 2

日	期	a	b	Σ 實際 ΔH_{2d}
10 月	5—6	-1.01	+0.55	-890 m
	8—9	+1.79	+0.80	+200 m
	16—17	-1.06	+0.74	+180 m
	17—18	-3.25	+0.79	-1990 m
	18—19	-1.47	+0.63	-950 m
	20—21	+0.39	+0.73	+260 m
	23—24	-1.96	+0.70	-1680 m
	27—28	+0.45	+0.39	+190 m
2 月	7—8	-0.23	+0.87	-1280 m
	15—16	-3.20	+0.66	-2530 m
	19—20	-3.51	+0.55	-3770 m
	20—21	-5.71	+0.73	+260 m

表 3

日	期	a	b	Σ 實際 ΔH_{2d}
10 月	5—6	-0.98	+1.47	-890
	7—8	-2.5	+1.74	-1640
	8—9	+1.20	+2.01	+200
	10—11	-0.86	+1.39	-1050
	16—17	-0.76	+1.88	+180
	17—18	-3.26	+1.88	-1280
	18—19	-1.28	+2.43	-950
	20—21	+0.96	+1.83	+260
	23—24	-1.34	+1.86	+1680
	27—28	+0.14	+1.33	+190
	28—29	+0.32	+1.67	+310
2 月	7—8	-1.22	+1.88	-1280
	15—16	-1.82	+1.18	-2530
	16—17	+1.39	+1.28	+1390
	19—20	-3.98	+1.59	-3770
	20—21	-5.48	+2.14	-2890
	25—26	+0.72	+1.52	+900

可知 a 之符號與 $\Sigma\Delta H$ 相同，由 b 的數值看 $m \approx 2$ 。

可以注意公式(1)較公式(3)的近似高一級。

四. 結 論

從以上的結果看來，圖解積分公式的近似程度可以滿足一般應用的要求。值得注意的是相關係數只是表示近似情況的一種方式，這是不够全面的。我們這裏很多相關係數並不高，但是變高的正負區域和中心位置却是對應得不算差的，差別只是在數值上。此外，有趣的是在我們所作的一些實際預報例子的分析中，發現預報的 $\Delta\xi$ 與實況 $\Delta\xi$ 的相關係數較之根據所預報的 $\Delta\xi$ 按圖解積分公式算出變高與實況變高的相關係數竟難分高低，似乎還可以說變高的相關係數略高於 $\Delta\xi$ 的。這說明解 Poisson 的 Fjórtoft 近似公式還是可以用的。問題在 \bar{H} 場的應用所導致的誤差則是大得不能使人滿意，需要設法改進，不過時間間隔如只用 12 小時，還是可以符合應用的要求。

這個工作是在廖洞賢先生指導下作的；有關圖解、統計工作係由陳世琪、陳志剛、瞿棟根等同志完成；又承本所印圖組同志幫助繪圖，謹此致謝。

參 考 文 獻

Fjórtoft, R., On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 4 (1952), 179—194.

SOME STATISTICAL STUDY OF FJÓRTOFT'S GRAPHICAL METHOD

CHOU GE-FEN and LIAO HSIANG-YÜN

(Central Institute of Meteorological Research, Central Weather Bureau)

ABSTRACT

The aim of this paper is to make clear the accuracy of the approximate integration formula $\Delta H = -(\Delta\xi + 2\Delta\bar{\xi})$ and the steadiness of the space mean velocity field (or space mean height field, i. e. \bar{H} -field). By analysing the change in actual field, the errors introduced by them are discussed.