

500 mb 形势数值预告的一种方案*

伍 榮 生

(南 京 大 学)

提 要

在本文中,作者为了避免500 mb位面无辐散的假定,引用了在大气顶 $P=0$ 处高度 H 随时间变化很小,而且此位面几近于一个平面的假定,经过一些简化后,便得出了500 mb形势预告的方程,这个方程与正压涡度方程很相似,尤其当栅格取得小些时(例如600 km),这个方程便较接近于正压预告方程,但二者是有本质上的区别的。于此文中,作者并指出在正压模式中,栅格取得小些时,可以得到较好的结果。从实例来看,这个方法是有些成功的。

1. 引 言

通常是用正压涡度方程进行500 mb形势预告的,此时由于略去散度的作用,使问题的处理得以简化,但也因为引进了500 mb就为无辐散位面的假定,使问题变得太粗略了,此时,我们很自然的会提出这样二个问题:无辐散位面是否为一固定等压面?此固定等压面是否恰好为500 mb?虽然Charney, Pálmen等人认为无辐散位面是位在600 mb左右,但已有很多人指出无辐散位面不仅在时间和地理上有显著的不同,而且在不同的天气形势下,它也有很大的变化,例如Petterssen曾从个例分析中指出在气压系统发展时,无辐散位面无显著的下降,又如H. Landers曾依实际结果指出,与其说无辐散位面存在于500 mb,不若认为存在于700 mb,所以把500 mb当作是一个不变的无辐散位面,这显然是太粗糙了。

如果我们能引用别的较500 mb无辐散位面的假定为合理的假定,而且使问题的处理又能像正压模式那么简洁方便,这样便可以克服了正压预告方程中所存有的许多缺点。本文便是希望达到这一目的。

2. 预告方程的建立

涡度方程可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right)(\zeta + f) = -(\zeta + f)\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

其中 ζ 为相对涡度的垂直分量, f 为柯氏参数, \mathbf{v} 为水平风速矢,因为 $\zeta < f$,故(1)式可写成:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right)(\zeta + f) = -f\nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2)$$

* 1958年10月20日收到。

連續方程写成

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \tag{3}$$

其中 $\omega \equiv \frac{dp}{dt}$, 將連續方程代入(2)式, 即得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) (\zeta + f) = f \frac{\partial \omega}{\partial p}. \tag{4}$$

引用地轉近似,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g = \frac{g}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla z, \quad \zeta = \zeta_g = \frac{g}{f} \nabla^2 z, \tag{5}$$

其中 \mathbf{k} 为垂直方向單位矢, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子, 为了方便起見, 以下均將 \mathbf{v}_g 与 ζ_g 中的 g 字省去. 如我們引用差分近似来代替微分, 則

$$\nabla^2 z = \frac{4}{d^2} [\bar{z} - z], \tag{6}$$

其中 $\bar{z} = \frac{1}{4} [z_1 + z_2 + z_3 + z_4]$, z 的附标如图 1 所示为各对应栅点上的高度. d 为栅距, 如

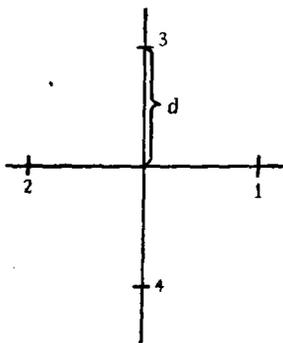


圖 1. 栅格圖.

考虑圖面扩大系数 m , 將(5)(6)两式关系代入(4)式, 即

可得出:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) [\bar{z} - z + J(\varphi)] = \frac{f^2 d^2}{4gm^2} \frac{\partial \omega}{\partial p}, \tag{7}$$

其中:
$$J(\varphi) = \frac{\Omega^2 d^2}{g} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{m^2} d\varphi.$$

因为絕热方程可写成:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) + \omega \sigma = 0, \tag{8}$$

其中 $\sigma = \frac{1}{\theta} \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ 为靜力稳定度, 通常可采取一个标准值

代替它, θ 为位温. 將(8)式对 p 微分, 略去 σ 随高度的变化, 則得:

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p}. \tag{9}$$

因为

$$\frac{\mathbf{v} \partial}{\partial p} = -\frac{1}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla d,$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\alpha}{g},$$

其中 α 为比容, 故知

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} = 0.$$

如此(9)式可化为

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}. \tag{10}$$

將(7)式,(10)式应用到 500 mb 上去,則其中 $z, \mathbf{v}, \frac{\partial \omega}{\partial p}$ 均指 500 mb 位面上的值。如此即得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\bar{z} + J(\varphi) - z + \frac{f^2 d^2}{4gm^2\sigma} \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\right) = 0. \quad (11)$$

如果我們以差分形式來代替 $\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}$, 則

$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = \frac{H + z_0 - 2z}{(\Delta p)^2}, \quad (12)$$

其中取 $\Delta p = 500 \text{ mb}$, z_0 為 1000 mb 的高度, H 為大氣頂 $P=0$ 處的高度。

在 Haurwitz 的動力氣象書中,曾依 A. Wagner 的數據點繪出氣壓在經圈方面的分布廓綫圖(第十三章,圖 67),在此圖上,我們可以清楚的看到在 16 km 處,南北氣壓梯度已經逐漸減小,在 20 km 處,已經是趨于零了。因此,我們可以假定在大氣頂 $P=0$ 處的高度梯度亦是几近于零,也就是說,此等壓面是近于一個平面,我們如果再取這樣一個上界條件,即這個位面的高度隨時間的變化很小,則我們可以將(12)代入(11),簡化得:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) (\bar{z} + J(\varphi) - (1 + 2a^2)z + a^2 z_0) = 0, \quad (13)$$

其中

$$a^2 = \frac{f^2 d^2}{4gm^2\sigma} \frac{1}{(\Delta p)^2},$$

或令

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2a^2}, \quad \beta = \frac{a^2}{1 + 2a^2} = a^2 \alpha,$$

則(13)式可寫成如下形式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) (\alpha(\bar{z} + J(\varphi)) + \beta z_0 - z) = 0. \quad (14)$$

(14)式是一個保守的方程,我們可以根据它作一些簡化,導出適合于我們的預報方程。

(i) 在 $d=1000 \text{ km}$ 時,如令:

$$\begin{aligned} f &= 10^{-4} \text{ sec}^{-1}, & \sigma &= 25 \times 10^{-4} \text{ mmb}^{-2}, \\ \Delta p &= 500 \text{ mb}, & g &= 9.8 \text{ m sec}^{-2}, \\ m^2 &= 1, \end{aligned}$$

則 $a^2 \approx \frac{1}{2}$, 如此(14)式化為:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{1}{2}(\bar{z} + J(\varphi)) + \frac{1}{4}z_0 - z\right) = 0. \quad (15)$$

因為我們知道在中緯地帶,風速隨高度是顯著增大的(嚴格說是在急流中心位面以下的地區,急流中心的位置隨季節而有變化,大約在 9—12 km 附近),故我們知道在 1000 mb 上,高度梯度是要小於高層的,例如 500 mb; 實際工作中均能發現這一事實的。此外,在實際工作中,亦經常可以注意到,高層 500 mb 的變高也是大於低層的。因此四分之一的 1000 mb 變高與其高度梯度必遠小於 500 mb 的變高與梯度。因之,我們可以將(15)式中的 $\frac{1}{4} z_0$ 項略去,這一措施與 Estoque 模式 II 中所引用的將 Bz_0 略去不計的假

定很相似,故(15)式化为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{1}{2}(\bar{z} + J(\varphi)) - z\right) = 0. \quad (16)$$

(16)式即为我們所得到的预报方程.

不考虑水平散度的正压预告方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) (\bar{z} + J(\varphi) - z) = 0. \quad (17)$$

从此我們可以見到(16)式与(17)式是很相似的,只是在 $\bar{z} + J(\varphi)$ 之前多了一个 $\frac{1}{2}$ 的系数.

此外,我們亦很有兴趣的發現(16)式与 Estoque 模式 I 中所得出的厚度预告方程与 Fjörtoft 所得的厚度预报方程很相似. Fjörtoft 的预报方程是:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(h - \frac{1}{2} \bar{h}\right) = 0;$$

Estoque 的为:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h - B\bar{h}) = -\mathbf{v}_s \cdot \nabla (h - B\bar{h}),$$

其中 h 为 1000 mb 到 500 mb 的厚度, \bar{h} 为对空間平均的平均厚度, B 为系数.

(ii) 在 $d = 600$ km 时, $a^2 \approx \frac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{7}$

如我們取 $a^2 = \frac{1}{7}$, 則(14)式化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{7}{9}(\bar{z} + J(\varphi)) + \frac{1}{9}z_0 - z\right) = 0; \quad (18)$$

同理,我們可以将 $\frac{1}{9}z_0$ 于上式中略去,如此(18)式簡化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \left(\frac{7}{9}(\bar{z} + J(\varphi)) - z\right) = 0. \quad (19)$$

(16)与(19)式是我們采用不用栅距时所得出的簡化预报方程.

在解(16)式时,以 $\frac{1}{2}(\bar{z} + J(\varphi))$ 为位移場,令

$$\frac{1}{2} \Delta(\bar{z} + J(\varphi)) - \Delta z = A. \quad (20)$$

对 A 取平均,則得

$$\frac{1}{2} \Delta \bar{z} - \Delta \bar{z} = \bar{A}.$$

因为 $\Delta \bar{z}$ 很小,可略去不計,如此則得

$$\Delta z = -\left(A + \frac{1}{2} \bar{A}\right). \quad (21)$$

或仿 Estoque, 認為 \bar{A} 的数值很小,于上式中可略去不計,則得到較方便但較粗略的方程:

$$\Delta z = -A. \quad (22)$$

同理,对(19)式言,其近似解可写成

$$\Delta z = -(A' + \bar{A}'), \quad (23)$$

其中 $A' = \Delta \left[\frac{7}{9} (\bar{z} + J(\varphi)) - z \right]$, 在(23)式中, 已将 $\frac{7}{9} \bar{A}'$ 作为 \bar{A}' 来处理。

3. 圖例

为了檢驗上述方法, 我們作了二天 500 mb 24 小时的形势预告, 并且以 Estoque 的简化公式和 Fjörtoft 的近似解来与它作一个比較。

我們取 $d=1000$ km, 以 $\Delta z = -\Delta \left(\frac{1}{2} (\bar{z} + J(\varphi)) - z \right)$ 来計算的, Estoque 公式为 $\Delta z = -\Delta (\bar{z} + J(\varphi) - z)$, Fjörtoft 公式为 $\Delta z = -[\Delta (\bar{z} + J(\varphi) - z) + 2\Delta (\bar{z} + J(\varphi) - z)]$ 。

1958 年 1 月 11 日 08 时到 13 日 08 时, 烏拉尔东侧有一阻塞高压崩溃, 橫槽轉向, 导致寒潮的爆發, 我們以 11 日和 12 日 08 时作为起始圖, 分別作出 12 日 08 时和 13 日 08 时的预告圖。

11 日到 12 日, 在貝加尔湖西侧有一塊正的变高区中心为 120 位势米, 其南在哈密附近有一中心在 -40 位势米以上的变高区, 这样的变高分布即反映出高空橫槽轉向, 偏北气流的加剧。用 Estoque 公式来预告, 則正变高中心位置与实况相差了 6, 7 个緯度, 负变高



圖 2. 1958 年 1 月 12 日 08 时到 11 月 13 日 08 时
500 mb 24 小时实际变高。



圖 3. 依 $\Delta z = -\Delta (\bar{z} + J(\varphi) - z)$ 求得的 24 小时变高。
以 1958 年 1 月 12 日 08 时为起始圖。

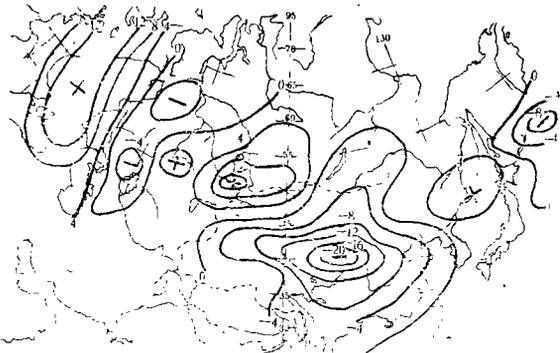


圖 4. 依 $\Delta z = -\Delta (\bar{z} + J(\varphi) - z) - 2\Delta (\bar{z} + J(\varphi) - z)$ 求得的
24 小时变高。以 1958 年 1 月 12 日 08 时为起始圖。

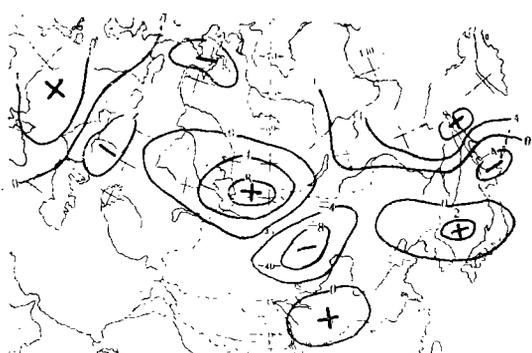


圖 5. 依 $\Delta z = -\Delta \left(\frac{1}{2} (\bar{z} + J(\varphi)) - z \right)$ 求得的 24 小时变高。
以 1958 年 11 月 12 日为起始圖。

的中心强度则报高了3倍左右;用 Fjörtoft 的公式,负变高中心也偏强了4—5倍(预告中心强度为-200位势米)。用作者所述公式,中心位置大致上是相合的,负变高区比实况稍强了40位势米,比其余二个公式均较为满意(圖略)。12日到13日的实际变高如圖2所示;用 Estoque 与 Fjörtoft 公式所得出的预报结果如圖3、圖4所示,在河套西北部的负变高均报得太强了。圖5为依本文所述公式作出的变高,从此我們亦可以看到其结果是优于其他各圖的。这从下表亦可看到的。下表是这二天预报变高和实际变高之間的相关系数:

相关系数	Estoque	Fjörtoft	(22)式
第一天 (11—12.08)	0.50	0.49	0.62
第二天 (12—13.08)	0.46*	0.66	0.75

* 汉口中心气象台在1958年3月15日到4月1日止,曾依 Estoque 公式每日作出500 mb 48小时预告,其结果均不甚满意,这一工作的统计结果,将由汉口台予以总结。

4. 討論

因为

$$\alpha = \frac{1}{1+2a^2}, \quad \beta = \frac{a^2}{1+2a^2},$$

而 a^2 又比例于 d^2 , 故 α, β 亦必随 d 而变,它們与 d 之間的变化曲线如圖6所示,当 d 从

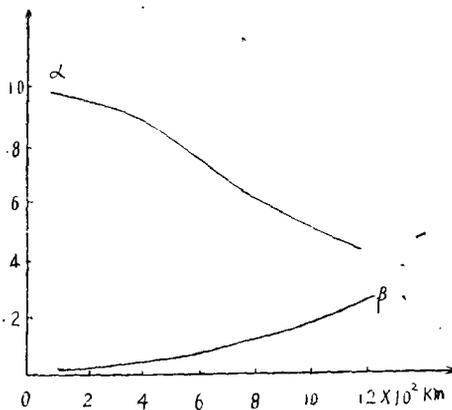


圖6. α, β 随 d 变化曲线。

100 km 增到1200 km 时, α 值从0.99减小到0.47,而 β 值从0.1增到0.27,由此可知,当 d 增大时 β 增大的速率是远小于 α 的减小速率,而且 β 值的本身是非常小的,此外,又因为 z_0 的变率与梯度均较 z 为小,所以我們可以近似的将(14)式中的 βz_0 项略去不計。

正压预告方程(17)看上去好像是(14)式中 $\alpha=1, \beta=0$ 的特例,事实上,要使 α, β 达到此特值时,須 $d=0$, 此时(14)式便毫无意义了。从圖6来看,我們可以知道当 d 取得較小时,例如600 km 时, α 值已为0.8左右,如近似的令 α 为1,則此时方程式(14)便变为

正压模式了,但此二者之間在对问题的处理上是有本質上的区别的。虽然 d 愈小, α 值愈接近于1,但我們不能将 d 取得太小,这一点在 Fjörtoft 的文章中已經就波長大小与栅距之間的关系作过詳細的討論。

我們知道在如圖1所示的範圍內,平均散度可写成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2d} [(u_1 - u_2) + (v_3 - v_4)] \\ &= \frac{1}{2d} (\Delta u + \Delta v). \end{aligned}$$

u, v 为边上的平均东西与南北向风速, 此处 u, v 不为地转风, 从此可知散度大小与 d 的大小有着非常密切的关系, 如 d 小, 则散度大, d 大则散度小, 因此在我們取较小 d 值时, 渦度方程中的散度项便较大了; 也就是说, 我們在此时如认为散度是很小的话, 则这便会有较大的误差, 这好像又与上面所说的在 d 较小时 α 愈趋于 1, 而方程式愈接近于正压方程的事实相反, 事实上这是由于在我們将渦度方程写成差分形式时, 在散度项上乘上了一项 $\frac{fd^2}{4gm^2}$, 即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right)(\bar{z} - z + J(\varphi)) = -\frac{f^2 d^2}{4gm^2} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{f^2 d}{8gm^2} [\Delta u + \Delta v].$$

在正压问题中, 是认为 $\Delta u + \Delta v = 0$, 故上方程右侧的大小与 d 无关而恒为零, 但在我們的问题中 $\Delta u + \Delta v \neq 0$, 这就是与正压问题的根本差异所在。因此, 右侧大小便与 d 的大小有着非常密切的关系了, 如 d 取得小时, 右侧总的的作用便较 d 大时为小, 当 $d=0$ 时, 右侧便亦为零了, 此时问题便无意义了。

从圖 6 的 α, β 值曲线来看, 可以推知在 d 较小时, 例如在 600 km 以下时, 上式右侧的总的大小已经是较小了, 在粗略的情况下, 不妨可以将它略去, 但当 d 较大时例如 1000 km 时, 右侧作用是较强的 ($\alpha \approx \frac{1}{2}$), 如将它略去是不够精确的, 故我們在作正压预告时, 取较小栅距会比大的栅距有较好的结果, 这也許可以说明为什么我們应用 Estoque 简化公式时 ($d=1000$ km), 不能得出较为满意结果的原因。

参 考 文 献

- [1] Landers, H., A three dimensional study of the horizontal velocity divergence. *J. Meteor.*, **12** (1955).
- [2] Petterssen, S., A general survey of factors in fuencing development at sea level. *J. Meteor.*, **12** (1955).
- [3] Fjörtoft, R., On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equaton. *Tellus*, **4** (1952).
- [4] Fjörtoft, R., On the use of space-smoothing in physical weather forecasting. *Tellus*, **7** (1955).
- [5] Estoque, M. A., A prediction model for cyclone development integrated by Fjörtoft's method. *J. Meteor.*, **13** (1956).
- [6] Estoque, M. A., Graphical integration of two level model. *J. Meteor.*, **14** (1957).
- [7] 廖洞賢: 圖解法数值预告綜合报告. 天气分析教材集.
- [8] Haurwitz, Dynamic meteorology, chapter 13 (1941).

A SCHEME OF NUMERICAL FORECASTING OF 500 mb FIELD

WU YON-SHEN

(*Nanking University*)

ABSTRACT

A basic equation for predicting 500 mb topography is obtained on the following two assumptions: (1) the level of $P=0$ is a horizontal plane, (2) its height H does not change with time. This equation is very similar to that for barotropic case, but with certain essential differences. In this article, author also points out that in the barotropic case, taking a smaller grid we will get a better result than that of a large grid. The examples of forecasting show that this method is rather successful.