

用球函数展开北半球地形的计算*

中央气象局气象科学研究所数值预报组**

提 要

通过计算,如取 $m \leq 36$, $n-m \leq 20$, 北半球地形一般可以相当精确地用球函数来表示。计算表明,除高纬度地区外,地形高度沿纬圈平均的相对误差都在 0.33% 以下。在计算过程中,作者还给出了检查错误的公式。对计算结果也进行了讨论。

用数值方法来研究气候理论或中长期预告问题时,我们经常利用球函数来求所讨论方程的闭合解;如在方程中考虑了地形影响,就需要将地形用球函数表示出来,即将地形 $\eta(\theta, \lambda)$ 写成:

$$\eta(\theta, \lambda) = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) \bar{P}_n^m(\cos \theta), \quad (1)$$

其中 θ 是余纬, λ 是经度, A_n^m, B_n^m 是球函数展开的系数, \bar{P}_n^m 是标准化的联属勒上德多项式, m, n 都是正整数。过去有些气象工作者(如 Мусаелян, 巢纪平等)在这方面曾作过一些工作,但他们所取的项数较少(一般 $m, n \leq 12$), 用他们的结果所表示的地形与实际出入较大。在我们现在的工作中,我们取较多的项,并对计算结果作一些讨论。

1. 计算公式

由(1)式如首先固定 θ , 对 λ 展开, 则

$$\eta(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m(\theta) \cos m\lambda + \beta_m(\theta) \sin m\lambda), \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_m(\theta) &= \sum_{n=m}^{\infty} A_n^m \bar{P}_n^m(\cos \theta), \\ \beta_m(\theta) &= \sum_{n=m}^{\infty} B_n^m \bar{P}_n^m(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

象所有实际问题一样:(一),函数只在一些分散点上有值,(二),级数只能取有限项。因此,最合理的确定系数的方法应该是:将级数用多项式代替,使得在全部点上的平方误差总和达到最小。这样,在公式(2)中,如只取 $2p$ 项,则我们有:

$$\eta = \alpha_0(\theta) + \sum_{m=1}^{p-1} (\alpha_m(\theta) \cos m\lambda + \beta_m(\theta) \sin m\lambda) + \alpha_p(\theta) \cos p\lambda. \quad (4)$$

若 η 值给定在 $0 \leq \lambda_k \leq 2\pi$ ($k = 1, 2, \dots, q$) 的 q 个点上, $q \geq 2p$, 而其中任意相邻两点之间的间隔相等; 则如所知,平方逼近的系数的表达式为

* 1959 年 5 月 25 日收到。

** 参加这一工作的还有科学院地球物理研究所纪立人和刘瑞芝同志。

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \eta(\theta, \lambda_k), \\
 \alpha_m &= \frac{2}{q} \sum_{k=1}^q \eta(\theta, \lambda_k) \cos m\lambda_k, \\
 \beta_m &= \frac{2}{q} \sum_{k=1}^q \eta(\theta, \lambda_k) \sin m\lambda_k, \quad \left(m_1 < \frac{q}{2}\right) \\
 \alpha_{q/2} &= \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q (-1)^k \eta(\theta, \lambda_k).
 \end{aligned} \tag{5}$$

根据所需的精确度,我們每隔 5 个經度和 5 个緯度取一点,在任一緯圈上共有 72 点;現取 $m \leq 36^*$,則待定的系数也有 72 个。可以証明,唯一存在一組值,使得(4)式在所給点上精确成立;而这組值就是(5)式所表示的。这样一来,我們用簡單的方法得到了十分精确的結果。同时,在所有点上精确成立的这一事实,可以用来鑑定計算的正确性。如全部 α_m, β_m 計算正确,則根据这些系数算得的地形数值,在所算的点上,应与实况一致;反过来也是一样。

有了 $\alpha_m(\theta), \beta_m(\theta)$, 就可由(5)式来决定 A_n^m 及 B_n^m 。因为直接用最小二乘法工作量很大,我們改用通常的方法,将无穷級数的系数的积分表达式写出,即

$$\begin{aligned}
 A_n^m &= \int_0^\pi \alpha_m(\theta) \bar{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \\
 B_n^m &= \int_0^\pi \beta_m(\theta) \bar{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta;
 \end{aligned} \tag{6}$$

然后用数值积分求出系数;自然,級数只能取有限項。

由球函数性质知道 $n - m$ 是 θ 方向波长的指标,按照慣例,波长小到某一程度的成份可以略去;所以,我們应固定 $n - m$ 来选取 n 。在这个工作中,我們取 $n - m \leq 20$ 。考虑到一般仅研究北半球情况,为了减少計算量,我們假定地形高度分布对于赤道是对称的,这样,(6)式变为

$$\begin{aligned}
 A_n^m &= \begin{cases} 2 \int_0^{\pi/2} \alpha_m(\theta) \bar{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta & n - m = 2i, \\ 0 & n - m = 2i + 1; \end{cases} \\
 B_n^m &= \begin{cases} 2 \int_0^{\pi/2} \beta_m(\theta) \bar{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta & n - m = 2i, \\ 0 & n - m = 2i + 1. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7}$$

所以,对每一固定的 m , 只有 11 个 A_n^m 值(或 B_n^m 值);对于所有的 m 共有 792 个系数,即在(1)式中有 792 項。

在計算 α_m, β_m 时,我們將 Runge 的廿四个縱坐标方法推广到 72 个縱坐标的情形,并設計出合用的計算格式(計算表格略)。当 $\alpha_m(\theta), \beta_m(\theta)$ 算出后,我們再用前述方法检查。这样就保证了計算的正确性。

然后,再根据(7)式,用梯形公式求 A_n^m 和 B_n^m 。

* m 之所以取 36 的另一原因是:在我們所应用的球函数表中: $m \leq 36, n \leq 56$, 这是目前所有表中次数最高的了。

根据球函数理论,我们有

$$\cos^2\theta \bar{P}_n^m(\cos\theta) = c_n^m \bar{P}_{n+2}^m(\cos\theta) + d_n^m \bar{P}_n^m(\cos\theta) + e_n^m \bar{P}_{n-2}^m(\cos\theta), \quad (8)$$

其中

$$c_n^m = \sqrt{\frac{[(n+2)^2 - m^2][(n+1)^2 - m^2]}{(2n+5)(2n+3)(2n+1)}},$$

$$d_n^m = \frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1},$$

$$e_n^m = \sqrt{\frac{(n^2 - m^2)[(n-1)^2 - m^2]}{(2n-1)^2(2n-3)(2n+1)}} = c_{n-2}^m.$$

c_n^m, d_n^m 和 e_n^m 的数值见附录(三)。如果我们令

$$\tilde{A}_n^m = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \alpha_m(\theta) \bar{P}_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \quad (9)$$

$$\tilde{B}_n^m = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \beta_m(\theta) \bar{P}_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta; \quad (10)$$

则

$$\tilde{A}_n^m = c_n^m A_{n+2}^m + d_n^m A_n^m + e_n^m A_{n-2}^m, \quad (11)$$

$$\tilde{B}_n^m = c_n^m B_{n+2}^m + d_n^m B_n^m + e_n^m B_{n-2}^m. \quad (12)$$

利用等式(11),(12),我们可以检查 A_n^m 和 B_n^m 的计算误差。譬如,对某一固定的 m , 分别计算(11)的两边,如等式成立,就表明 $A_{n-2}^m, A_n^m, A_{n+2}^m$ 的计算正确;反过来也是一样。

表 1 是用 Berkofsky 的平均地形数值表^[1]求得的系数。为了保证计算的正确性,我们除了由二组计算同志分别独立计算,相互校对外,还应用了前述的检验公式,对所有系数进行检查。

表 1 地形球函数系数

(a_1) A_n^m (单位:米)

	A_0^0	A_2^0	A_4^0	A_6^0	A_8^0	A_{10}^0	A_{12}^0	A_{14}^0	A_{16}^0	A_{18}^0	A_{20}^0
$m=0$	482	63	-188	68	47	-122	7	40	-38	2	12
	A_1^1	A_3^1	A_5^1	A_7^1	A_9^1	A_{11}^1	A_{13}^1	A_{15}^1	A_{17}^1	A_{19}^1	A_{21}^1
$m=1$	167	-81	-27	69	106	55	-16	0	-41	-17	-20
	A_2^2	A_4^2	A_6^2	A_8^2	A_{10}^2	A_{12}^2	A_{14}^2	A_{16}^2	A_{18}^2	A_{20}^2	A_{22}^2
$m=2$	-306	-346	229	127	-156	72	14	-111	20	73	-62
	A_3^3	A_5^3	A_7^3	A_9^3	A_{11}^3	A_{13}^3	A_{15}^3	A_{17}^3	A_{19}^3	A_{21}^3	A_{23}^3
$m=3$	82	143	57	6	-87	-50	26	-66	-41	32	-5
	A_4^4	A_6^4	A_8^4	A_{10}^4	A_{12}^4	A_{14}^4	A_{16}^4	A_{18}^4	A_{20}^4	A_{22}^4	A_{24}^4
$m=4$	146	273	-107	-171	-8	-65	-69	30	-10	-74	6
	A_5^5	A_7^5	A_9^5	A_{11}^5	A_{13}^5	A_{15}^5	A_{17}^5	A_{19}^5	A_{21}^5	A_{23}^5	A_{25}^5
$m=5$	-89	-83	-22	-18	23	21	-71	-54	-39	-74	-54
	A_6^6	A_8^6	A_{10}^6	A_{12}^6	A_{14}^6	A_{16}^6	A_{18}^6	A_{20}^6	A_{22}^6	A_{24}^6	A_{26}^6
$m=6$	-73	-92	18	66	-9	-60	-18	-30	-63	19	-2
	A_7^7	A_9^7	A_{11}^7	A_{13}^7	A_{15}^7	A_{17}^7	A_{19}^7	A_{21}^7	A_{23}^7	A_{25}^7	A_{27}^7
$m=7$	26	144	-35	-18	42	-7	-8	44	3	-16	-6
	A_8^8	A_{10}^8	A_{12}^8	A_{14}^8	A_{16}^8	A_{18}^8	A_{20}^8	A_{22}^8	A_{24}^8	A_{26}^8	A_{28}^8
$m=8$	13	80	-12	-57	-14	77	-13	3	71	-1	-22

$m=9$	A_0^9	A_{11}^9	A_{13}^9	A_{15}^9	A_{17}^9	A_{19}^9	A_{21}^9	A_{23}^9	A_{25}^9	A_{27}^9	A_{29}^9
	30	-42	52	49	-50	3	18	-14	-29	2	35
$m=10$	A_{10}^{10}	A_{12}^{10}	A_{14}^{10}	A_{16}^{10}	A_{18}^{10}	A_{20}^{10}	A_{22}^{10}	A_{24}^{10}	A_{26}^{10}	A_{28}^{10}	A_{30}^{10}
	64	17	43	37	-18	-66	8	66	-28	6	49
$m=11$	A_{11}^{11}	A_{13}^{11}	A_{15}^{11}	A_{17}^{11}	A_{19}^{11}	A_{21}^{11}	A_{23}^{11}	A_{25}^{11}	A_{27}^{11}	A_{29}^{11}	A_{31}^{11}
	31	17	-13	-44	11	17	3	11	-16	-19	-14
$m=12$	A_{12}^{12}	A_{14}^{12}	A_{16}^{12}	A_{18}^{12}	A_{20}^{12}	A_{22}^{12}	A_{24}^{12}	A_{26}^{12}	A_{28}^{12}	A_{30}^{12}	A_{32}^{12}
	-41	-44	-7	-36	-16	49	19	-75	-1	-14	-38
$m=13$	A_{13}^{13}	A_{15}^{13}	A_{17}^{13}	A_{19}^{13}	A_{21}^{13}	A_{23}^{13}	A_{25}^{13}	A_{27}^{13}	A_{29}^{13}	A_{31}^{13}	A_{33}^{13}
	-47	4	40	2	-27	-9	27	-43	-1	-4	5
$m=14$	A_{14}^{14}	A_{16}^{14}	A_{18}^{14}	A_{20}^{14}	A_{22}^{14}	A_{24}^{14}	A_{26}^{14}	A_{28}^{14}	A_{30}^{14}	A_{32}^{14}	A_{34}^{14}
	9	50	11	4	5	-51	-13	24	-7	-16	10
$m=15$	A_{15}^{15}	A_{17}^{15}	A_{19}^{15}	A_{21}^{15}	A_{23}^{15}	A_{25}^{15}	A_{27}^{15}	A_{29}^{15}	A_{31}^{15}	A_{33}^{15}	A_{35}^{15}
	-2	-7	-28	36	36	-23	-20	19	4	-8	-10
$m=16$	A_{16}^{16}	A_{18}^{16}	A_{20}^{16}	A_{22}^{16}	A_{24}^{16}	A_{26}^{16}	A_{28}^{16}	A_{30}^{16}	A_{32}^{16}	A_{34}^{16}	A_{36}^{16}
	-44	-22	-21	43	7	0	22	8	5	6	-4
$m=17$	A_{17}^{17}	A_{19}^{17}	A_{21}^{17}	A_{23}^{17}	A_{25}^{17}	A_{27}^{17}	A_{29}^{17}	A_{31}^{17}	A_{33}^{17}	A_{35}^{17}	A_{37}^{17}
	-14	37	6	2	-34	-1	3	-14	-5	0	2
$m=18$	A_{18}^{18}	A_{20}^{18}	A_{22}^{18}	A_{24}^{18}	A_{26}^{18}	A_{28}^{18}	A_{30}^{18}	A_{32}^{18}	A_{34}^{18}	A_{36}^{18}	A_{38}^{18}
	27	31	17	-12	11	17	-11	-2	-2	14	1

(a₂)

$m=19$	A_{19}^{19}	A_{21}^{19}	A_{23}^{19}	A_{25}^{19}	A_{27}^{19}	A_{29}^{19}	A_{31}^{19}	A_{33}^{19}	A_{35}^{19}	A_{37}^{19}	A_{39}^{19}
	9	-45	-7	13	26	3	-15	-3	-8	14	-4
$m=20$	A_{20}^{20}	A_{22}^{20}	A_{24}^{20}	A_{26}^{20}	A_{28}^{20}	A_{30}^{20}	A_{32}^{20}	A_{34}^{20}	A_{36}^{20}	A_{38}^{20}	A_{40}^{20}
	-16	-31	-2	20	-6	-17	-9	4	10	10	-4
$m=21$	A_{21}^{21}	A_{23}^{21}	A_{25}^{21}	A_{27}^{21}	A_{29}^{21}	A_{31}^{21}	A_{33}^{21}	A_{35}^{21}	A_{37}^{21}	A_{39}^{21}	A_{41}^{21}
	-18	13	33	-10	-13	-22	-1	9	8	-22	12
$m=22$	A_{22}^{22}	A_{24}^{22}	A_{26}^{22}	A_{28}^{22}	A_{30}^{22}	A_{32}^{22}	A_{34}^{22}	A_{36}^{22}	A_{38}^{22}	A_{40}^{22}	A_{42}^{22}
	-23	-22	10	-17	7	-21	-6	8	-5	-24	18
$m=23$	A_{23}^{23}	A_{25}^{23}	A_{27}^{23}	A_{29}^{23}	A_{31}^{23}	A_{33}^{23}	A_{35}^{23}	A_{37}^{23}	A_{39}^{23}	A_{41}^{23}	A_{43}^{23}
	-9	-32	-22	-3	26	-3	-17	-11	4	9	7
$m=24$	A_{24}^{24}	A_{26}^{24}	A_{28}^{24}	A_{30}^{24}	A_{32}^{24}	A_{34}^{24}	A_{36}^{24}	A_{38}^{24}	A_{40}^{24}	A_{42}^{24}	A_{44}^{24}
	1	3	4	-6	16	15	0	-19	-1	24	17
$m=25$	A_{25}^{25}	A_{27}^{25}	A_{29}^{25}	A_{31}^{25}	A_{33}^{25}	A_{35}^{25}	A_{37}^{25}	A_{39}^{25}	A_{41}^{25}	A_{43}^{25}	A_{45}^{25}
	0	13	14	-12	1	16	2	5	-8	1	14
$m=26$	A_{26}^{26}	A_{28}^{26}	A_{30}^{26}	A_{32}^{26}	A_{34}^{26}	A_{36}^{26}	A_{38}^{26}	A_{40}^{26}	A_{42}^{26}	A_{44}^{26}	A_{46}^{26}
	-16	-6	-18	2	-9	-13	0	14	1	-28	14
$m=27$	A_{27}^{27}	A_{29}^{27}	A_{31}^{27}	A_{33}^{27}	A_{35}^{27}	A_{37}^{27}	A_{39}^{27}	A_{41}^{27}	A_{43}^{27}	A_{45}^{27}	A_{47}^{27}
	-14	-7	-9	6	-12	-29	6	6	4	-8	-7
$m=28$	A_{28}^{28}	A_{30}^{28}	A_{32}^{28}	A_{34}^{28}	A_{36}^{28}	A_{38}^{28}	A_{40}^{28}	A_{42}^{28}	A_{44}^{28}	A_{46}^{28}	A_{48}^{28}
	21	0	10	11	-7	5	-7	-7	-9	15	-6
$m=29$	A_{29}^{29}	A_{31}^{29}	A_{33}^{29}	A_{35}^{29}	A_{37}^{29}	A_{39}^{29}	A_{41}^{29}	A_{43}^{29}	A_{45}^{29}	A_{47}^{29}	A_{49}^{29}
	30	3	-10	8	3	18	-20	-6	2	16	4
$m=30$	A_{30}^{30}	A_{32}^{30}	A_{34}^{30}	A_{36}^{30}	A_{38}^{30}	A_{40}^{30}	A_{42}^{30}	A_{44}^{30}	A_{46}^{30}	A_{48}^{30}	A_{50}^{30}
	-4	6	-13	-11	5	4	-5	1	10	0	-4
$m=31$	A_{31}^{31}	A_{33}^{31}	A_{35}^{31}	A_{37}^{31}	A_{39}^{31}	A_{41}^{31}	A_{43}^{31}	A_{45}^{31}	A_{47}^{31}	A_{49}^{31}	A_{51}^{31}
	-13	-1	-2	-11	-5	-8	12	4	-3	-8	-3
	A_{32}^{32}	A_{34}^{32}	A_{36}^{32}	A_{38}^{32}	A_{40}^{32}	A_{42}^{32}	A_{44}^{32}	A_{46}^{32}	A_{48}^{32}	A_{50}^{32}	A_{52}^{32}

$m=32$	7	11	14	-8	6	-1	-2	5	12	-7	0
	A_{33}^{33}	A_{36}^{33}	A_{37}^{33}	A_{38}^{33}	A_{41}^{33}	A_{43}^{33}	A_{45}^{33}	A_{47}^{33}	A_{49}^{33}	A_{51}^{33}	A_{53}^{33}
$m=33$	13	9	12	1	12	13	-3	15	4	2	-12
	A_{34}^{34}	A_{36}^{34}	A_{38}^{34}	A_{40}^{34}	A_{42}^{34}	A_{44}^{34}	A_{46}^{34}	A_{48}^{34}	A_{50}^{34}	A_{52}^{34}	A_{54}^{34}
$m=34$	18	-10	-16	3	-23	2	-2	16	-25	9	-6
	A_{35}^{35}	A_{37}^{35}	A_{39}^{35}	A_{41}^{35}	A_{43}^{35}	A_{45}^{35}	A_{47}^{35}	A_{49}^{35}	A_{51}^{35}	A_{53}^{35}	A_{55}^{35}
$m=35$	5	-4	-15	1	-14	-10	-3	-8	-9	-2	6
	A_{36}^{36}	A_{38}^{36}	A_{40}^{36}	A_{42}^{36}	A_{44}^{36}	A_{46}^{36}	A_{48}^{36}	A_{50}^{36}	A_{52}^{36}	A_{54}^{36}	A_{56}^{36}
$m=36$	-7	2	-1	2	10	-4	2	-9	6	-5	4

(b₁) B_n^m (单位:米)

	B_1^1	B_3^1	B_5^1	B_7^1	B_9^1	B_{11}^1	B_{13}^1	B_{15}^1	B_{17}^1	B_{19}^1	B_{21}^1
$m=1$	364	112	-346	12	100	-158	-2	99	-87	-4	90
	B_2^2	B_4^2	B_6^2	B_8^2	B_{10}^2	B_{12}^2	B_{14}^2	B_{16}^2	B_{18}^2	B_{20}^2	B_{22}^2
$m=2$	144	55	-119	-77	-27	-45	-114	5	30	-5	-6
	B_3^3	B_5^3	B_7^3	B_9^3	B_{11}^3	B_{13}^3	B_{15}^3	B_{17}^3	B_{19}^3	B_{21}^3	B_{23}^3
$m=3$	-12	-227	121	31	-157	29	35	-115	-14	51	-71
	B_4^4	B_6^4	B_8^4	B_{10}^4	B_{12}^4	B_{14}^4	B_{16}^4	B_{18}^4	B_{20}^4	B_{22}^4	B_{24}^4
$m=4$	116	-114	51	49	-33	-65	51	-8	-52	24	9
	B_5^5	B_7^5	B_9^5	B_{11}^5	B_{13}^5	B_{15}^5	B_{17}^5	B_{19}^5	B_{21}^5	B_{23}^5	B_{25}^5
$m=5$	94	187	59	-53	54	31	-8	37	15	-39	4
	B_6^6	B_8^6	B_{10}^6	B_{12}^6	B_{14}^6	B_{16}^6	B_{18}^6	B_{20}^6	B_{22}^6	B_{24}^6	B_{26}^6
$m=6$	-55	66	34	-18	-41	16	54	6	51	26	-6
	B_7^7	B_9^7	B_{11}^7	B_{13}^7	B_{15}^7	B_{17}^7	B_{19}^7	B_{21}^7	B_{23}^7	B_{25}^7	B_{27}^7
$m=7$	-93	-136	-97	60	46	-22	73	47	5	22	39
	B_8^8	B_{10}^8	B_{12}^8	B_{14}^8	B_{16}^8	B_{18}^8	B_{20}^8	B_{22}^8	B_{24}^8	B_{26}^8	B_{28}^8
$m=8$	-29	12	-10	8	62	-3	-30	34	41	8	-2
	B_9^9	B_{11}^9	B_{13}^9	B_{15}^9	B_{17}^9	B_{19}^9	B_{21}^9	B_{23}^9	B_{25}^9	B_{27}^9	B_{29}^9
$m=9$	25	100	89	-20	2	29	-41	-17	27	26	-45
	B_{10}^{10}	B_{12}^{10}	B_{14}^{10}	B_{16}^{10}	B_{18}^{10}	B_{20}^{10}	B_{22}^{10}	B_{24}^{10}	B_{26}^{10}	B_{28}^{10}	B_{30}^{10}
$m=10$	14	-5	-28	2	-10	-11	1	4	-31	-12	-34
	B_{11}^{11}	B_{13}^{11}	B_{15}^{11}	B_{17}^{11}	B_{19}^{11}	B_{21}^{11}	B_{23}^{11}	B_{25}^{11}	B_{27}^{11}	B_{29}^{11}	B_{31}^{11}
$m=11$	5	-18	-38	52	13	-52	-3	29	-20	-22	21
	B_{12}^{12}	B_{14}^{12}	B_{16}^{12}	B_{18}^{12}	B_{20}^{12}	B_{22}^{12}	B_{24}^{12}	B_{26}^{12}	B_{28}^{12}	B_{30}^{12}	B_{32}^{12}
$m=12$	21	0	45	23	7	-15	-30	1	3	-22	2
	B_{13}^{13}	B_{15}^{13}	B_{17}^{13}	B_{19}^{13}	B_{21}^{13}	B_{23}^{13}	B_{25}^{13}	B_{27}^{13}	B_{29}^{13}	B_{31}^{13}	B_{33}^{13}
$m=13$	16	-10	24	-73	-6	39	4	-5	23	40	4
	B_{14}^{14}	B_{16}^{14}	B_{18}^{14}	B_{20}^{14}	B_{22}^{14}	B_{24}^{14}	B_{26}^{14}	B_{28}^{14}	B_{30}^{14}	B_{32}^{14}	B_{34}^{14}
$m=14$	-11	-24	-17	-56	-5	34	31	-10	-19	13	17
	B_{15}^{15}	B_{17}^{15}	B_{19}^{15}	B_{21}^{15}	B_{23}^{15}	B_{25}^{15}	B_{27}^{15}	B_{29}^{15}	B_{31}^{15}	B_{33}^{15}	B_{35}^{15}
$m=15$	-9	1	-11	11	2	-19	1	-11	-9	-1	33
	B_{16}^{16}	B_{18}^{16}	B_{20}^{16}	B_{22}^{16}	B_{24}^{16}	B_{26}^{16}	B_{28}^{16}	B_{30}^{16}	B_{32}^{16}	B_{34}^{16}	B_{36}^{16}
$m=16$	-19	11	10	10	20	-25	-6	10	19	-10	13
	B_{17}^{17}	B_{19}^{17}	B_{21}^{17}	B_{23}^{17}	B_{25}^{17}	B_{27}^{17}	B_{29}^{17}	B_{31}^{17}	B_{33}^{17}	B_{35}^{17}	B_{37}^{17}
$m=17$	-29	-13	-14	-16	15	-5	-1	9	1	-28	-11
	B_{18}^{18}	B_{20}^{18}	B_{22}^{18}	B_{24}^{18}	B_{26}^{18}	B_{28}^{18}	B_{30}^{18}	B_{32}^{18}	B_{34}^{18}	B_{36}^{18}	B_{38}^{18}
$m=18$	5	5	-30	-14	-8	7	5	-5	-30	-18	2

(b₂)

	B_{19}^{19}	B_{21}^{19}	B_{23}^{19}	B_{25}^{19}	B_{27}^{19}	B_{29}^{19}	B_{31}^{19}	B_{33}^{19}	B_{35}^{19}	B_{37}^{19}	B_{39}^{19}
$m=19$	15	31	0	4	-11	17	11	-11	-14	3	-3
	B_{20}^{20}	B_{22}^{20}	B_{24}^{20}	B_{26}^{20}	B_{28}^{20}	B_{30}^{20}	B_{32}^{20}	B_{34}^{20}	B_{36}^{20}	B_{38}^{20}	B_{40}^{20}
$m=20$	-4	28	-10	0	11	30	-12	-11	10	5	3
	B_{21}^{21}	B_{23}^{21}	B_{25}^{21}	B_{27}^{21}	B_{29}^{21}	B_{31}^{21}	B_{33}^{21}	B_{35}^{21}	B_{37}^{21}	B_{39}^{21}	B_{41}^{21}
$m=21$	-9	-2	-27	-3	-6	10	-9	-3	20	-2	5
	B_{22}^{22}	B_{24}^{22}	B_{26}^{22}	B_{28}^{22}	B_{30}^{22}	B_{32}^{22}	B_{34}^{22}	B_{36}^{22}	B_{38}^{22}	B_{40}^{22}	B_{42}^{22}
$m=22$	8	-18	14	3	-26	-28	8	12	-10	-13	-2
	B_{23}^{23}	B_{25}^{23}	B_{27}^{23}	B_{29}^{23}	B_{31}^{23}	B_{33}^{23}	B_{35}^{23}	B_{37}^{23}	B_{39}^{23}	B_{41}^{23}	B_{43}^{23}
$m=23$	16	-11	23	7	-9	-7	0	11	-15	-5	7
	B_{24}^{24}	B_{26}^{24}	B_{28}^{24}	B_{30}^{24}	B_{32}^{24}	B_{34}^{24}	B_{36}^{24}	B_{38}^{24}	B_{40}^{24}	B_{42}^{24}	B_{44}^{24}
$m=24$	-8	8	-18	-18	2	6	-18	-12	19	-8	-4
	B_{25}^{25}	B_{27}^{25}	B_{29}^{25}	B_{31}^{25}	B_{33}^{25}	B_{35}^{25}	B_{37}^{25}	B_{39}^{25}	B_{41}^{25}	B_{43}^{25}	B_{45}^{25}
$m=25$	-27	10	-8	-19	11	-14	-9	-20	25	-6	7
	B_{26}^{26}	B_{28}^{26}	B_{30}^{26}	B_{32}^{26}	B_{34}^{26}	B_{36}^{26}	B_{38}^{26}	B_{40}^{26}	B_{42}^{26}	B_{44}^{26}	B_{46}^{26}
$m=26$	-11	-11	10	8	20	5	21	-17	-11	0	10
	B_{27}^{27}	B_{29}^{27}	B_{31}^{27}	B_{33}^{27}	B_{35}^{27}	B_{37}^{27}	B_{39}^{27}	B_{41}^{27}	B_{43}^{27}	B_{45}^{27}	B_{47}^{27}
$m=27$	6	-1	3	-13	-13	2	9	11	-11	-7	3
	B_{28}^{28}	B_{30}^{28}	B_{32}^{28}	B_{34}^{28}	B_{36}^{28}	B_{38}^{28}	B_{40}^{28}	B_{42}^{28}	B_{44}^{28}	B_{46}^{28}	B_{48}^{28}
$m=28$	-2	1	-8	-18	-30	-22	-14	17	0	-4	-9
	B_{29}^{29}	B_{31}^{29}	B_{33}^{29}	B_{35}^{29}	B_{37}^{29}	B_{39}^{29}	B_{41}^{29}	B_{43}^{29}	B_{45}^{29}	B_{47}^{29}	B_{49}^{29}
$m=29$	0	-5	-9	26	-2	-9	-4	-8	-6	0	-3
	B_{30}^{30}	B_{32}^{30}	B_{34}^{30}	B_{36}^{30}	B_{38}^{30}	B_{40}^{30}	B_{42}^{30}	B_{44}^{30}	B_{46}^{30}	B_{48}^{30}	B_{50}^{30}
$m=30$	-8	7	-6	18	9	-12	11	-27	10	6	22
	B_{31}^{31}	B_{33}^{31}	B_{35}^{31}	B_{37}^{31}	B_{39}^{31}	B_{41}^{31}	B_{43}^{31}	B_{45}^{31}	B_{47}^{31}	B_{49}^{31}	B_{51}^{31}
$m=31$	-8	1	-5	-17	-12	-8	-3	-16	10	-1	8
	B_{32}^{32}	B_{34}^{32}	B_{36}^{32}	B_{38}^{32}	B_{40}^{32}	B_{42}^{32}	B_{44}^{32}	B_{46}^{32}	B_{48}^{32}	B_{50}^{32}	B_{52}^{32}
$m=32$	16	-14	-10	-8	-17	10	-15	7	-1	1	-17
	B_{33}^{33}	B_{35}^{33}	B_{37}^{33}	B_{39}^{33}	B_{41}^{33}	B_{43}^{33}	B_{45}^{33}	B_{47}^{33}	B_{49}^{33}	B_{51}^{33}	B_{53}^{33}
$m=33$	11	-2	2	15	15	1	-3	16	-3	7	-4
	B_{34}^{34}	B_{36}^{34}	B_{38}^{34}	B_{40}^{34}	B_{42}^{34}	B_{44}^{34}	B_{46}^{34}	B_{48}^{34}	B_{50}^{34}	B_{52}^{34}	B_{54}^{34}
$m=34$	-15	18	19	-4	17	-2	11	3	12	-7	4
	B_{35}^{35}	B_{37}^{35}	B_{39}^{35}	B_{41}^{35}	B_{43}^{35}	B_{45}^{35}	B_{47}^{35}	B_{49}^{35}	B_{51}^{35}	B_{53}^{35}	B_{55}^{35}
$m=35$	-11	10	5	-24	-14	-2	5	-11	16	-7	-16

2. 討論

用上述方法表示地形高度分布造成的誤差,也进行了检查。按照公式

$$\eta(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{36} \sum_{n=m}^{m+20} (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) \bar{P}_n^m(\cos \theta). \quad (13)$$

我們計算了北半球地形高度值(除了 $\theta = 55^\circ, 50^\circ, 45^\circ$ 三个緯度以外, θ 方向每10度算一次;而 λ 方向都取5度間隔),結果见图1。图2是实况。此外还計算了 $\theta = 55^\circ$ 地形高度的分布(图3)。比較一下,可以看出:

(1) 几个大山脉都表示得很好。平均誤差在80公尺左右,誤差超过400公尺的只有三点。根据計算 $\theta = 55^\circ$ 的山脉緯向(沿緯圈方向)梯度,最大誤差为 22×10^{-6} 。

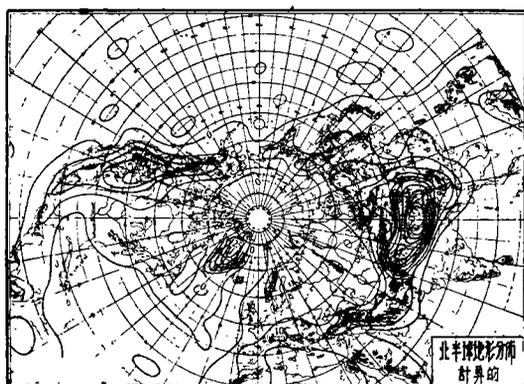


图 1

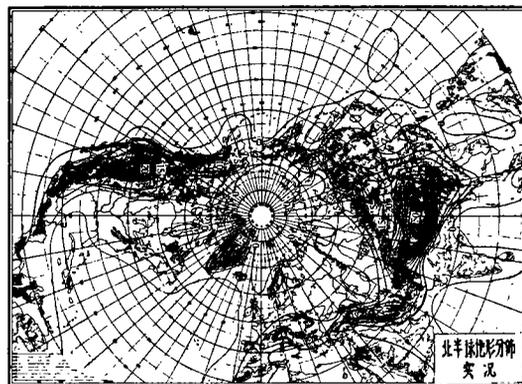


图 2

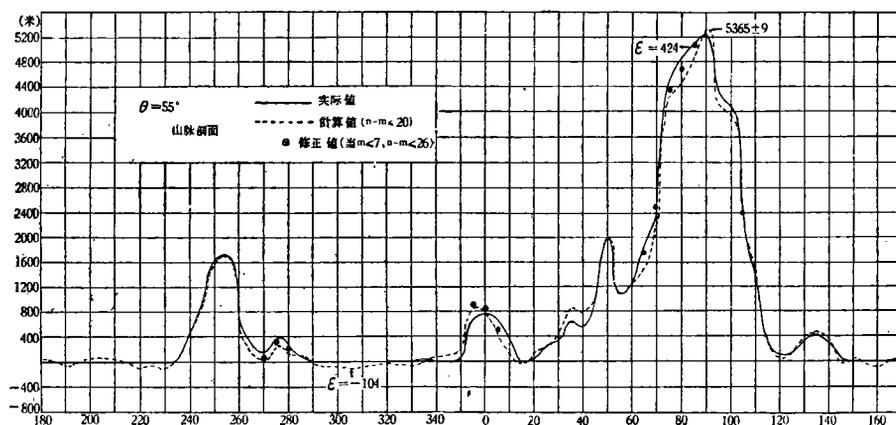


图 3

(2) 高纬度地形不如中低纬度地形表示得好。这一特点从计算的各纬度地形剖面图看得很清楚。例如 $\theta = 25^\circ$ 冰岛处有 700 多米误差；而在中低纬度比冰岛更高的洛磯山误差不超出 100 米。从表 2 亦可看出，地形高度在高纬的平均相对误差一般都比低纬大。但从应用的观点看来，这一点对我国的影响不大。总之，可以认为所表示的地形，无论是梯度或是绝对高度，都能初步满足气象工作的需要了。

表 2

θ°	85	75	65	60	55	50	45	35	25	15	5
误差 %	0.23	0.30	0.16	0.13	0.10	0.07	0.23	0.33	0.36	0.48	0.55

产生误差的原因是：

(1) 第二次展开没有用最小二乘法。为了弄清误差情况，我们用计算的 A_n^m, B_n^m 按公式(3)计算了 $\theta = 55^\circ$ 的 α_m, β_m (记作 α_m^*, β_m^*)，再和前面计算的 α_m, β_m 比较。可以看出，一般误差还不算小(见表 3)。因为 α_m, β_m 是按最小二乘法求出的，它和 α_m^*, β_m^* 的差可看

作是和真值的差。

表 3
(a) α_m, α_m^{**} 和 α_m^* 的比較 ($\theta = 55^\circ$)

m	0	1	2	3	4	5	6	7
α_m (米)	760.3	177.7	-1036.4	-57.9	621.4	37.5	-240.3	96.0
α_m^*	726.8	175.8	-953.6	-29.8	577.0	-5.7	-250.9	90.4
α_m^{**}	763.4	185.7	-986.5	-57.0	605.5	36.5	-257.3	90.5
$\alpha_m^* - \alpha_m$	-33.5	-1.9	82.8	28.1	44.4	-43.2	-10.6	-5.6
$\alpha_m^{**} - \alpha_m$	3.1	8.0	49.9	0.9	-15.9	-1.0	-1.7	-5.5

(b) β_m, β_m^* 和 β_m^{**} 的比較 ($\theta = 55^\circ$)

m	1	2	3	4	5	6	7
β_m (米)	1010.5	335.8	-589.4	-303.7	374.2	175.3	-333.5
β_m^*	975.9	325.2	-543.2	-271.8	349.0	129.7	-386.4
β_m^{**}	993.4	342.2	-587.2	-303.4	372.3	165.5	-352.4
$\beta_m^* - \beta$	-34.6	-10.6	46.2	31.9	-25.2	-45.6	-52.9
$\beta_m^{**} - \beta$	17.1	6.4	2.2	0.3	-1.9	9.8	-18.9

(2) 第二次展开所取的項数太少, 如我們將 $m < 7$ 的 n 的最大值增加到 $m + 26$, 計算結果(仍按公式(3)計算, 計算的 α_m, β_m 記作 $\alpha_m^{**}, \beta_m^{**}$) 可以使誤差显著减小(見表 3, 图(1))。但是, 在其他情形, 由于我們对 $n - m$ 的限制, 球函数在 θ 方向最短半波长(9°) 大于 λ 方向的最短半波长(5°)。因而, 在 θ 和 λ 方向, 它們的逼近能力并不一致。事实上, 从 α_m, β_m 的分布看来, 它們随 θ 的变化很大, 显然还需要用比現在更短的波的成份, 才能克服这个困难。

(3) 从联属勒上特函数的性質来看, 在我們所取的 m, n 范围内, 当 $\cos\theta \rightarrow 1$ 时, 除了 m 較小的几个以外, $|\bar{P}_n^m(\cos\theta)| \rightarrow 0$, 即高緯度 \bar{P}_n^m 接近于零。即使增加一些項(如 $n - m \leq 26$ 或更多), 由于 \bar{P}_n^m 随 n 增加的速度很慢; 而 n 增加时, 对应的系数 A_n^m, B_n^m 的数值却减小, 这就使得(3)式中每一項都很小; 換句話說, 这时級数(3)收斂于 $\alpha_m(\theta), \beta_m(\theta)$ 的速度在高緯比較緩慢。这一情况定性的說明了在高緯度地形表示得不好的原因。

这工作是在苏联专家 Добрышман 同志指导之下进行的, 对于他热情的帮助和指导, 謹表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Berkofsky and Bertoni, Mean topographic Charts for the entire earth. *Bull. Amer. Met. Soc.*, 36 (1955), No. 7.

NORTHERN HEMISPHERE OROGRAPHY EXPRESSED BY SPHERICAL FUNCTIONS

*Section of Numerical Prediction, Institute of Meteorological
Research, Central Weather Bureau*

ABSTRACT

With the data of orographic height above mean sea-level given by Bekofsky, an orographic chart for the Northern Hemisphere expressed by spherical functions is prepared. It is found that the chart computed is fairly in accord with the one prepared by Bekofsky except in the region near the north pole.