

## 切变涡度和曲率涡度在正压大气中的相互转化 及其在天气预报中的应用\*

廖洞贤

(中央气象局气象科学研究所)

### 提 要

从日常正压数值预报中发现,在500毫巴图上即便初始场是盛行的平直西风,仍常有气压系统发展或新生等现象,这意味着气压系统和涡度系统的发展不是一回事。考虑前者的发展和曲率涡度的变化有密切的关系,作者推导了曲率涡度和切变涡度的预报方程。可以证明,这两个物理量不是保守的。在某些情况下即便不考虑地球自转的作用,在气流汇合和散开的地区二者仍可能相互转化。利用这些结果前面的问题可以得到合理的解释。

最后,为了便于在实际工作中应用,作者还给出了一些适用于天气预报的规则。

### 一、引 言

正压模式是数值预报中用得最久且较成熟的模式。可是,从已发表的文献来看,除了早期人们对简单的线性化模式(如基本气流是均匀的等)作过一些较深入的研究外,对于非线性模式,甚至一般线性化模式的了解仍是不够多的。

最近几年通过大量计算,人们发现,预报结果和过去了解的有相当出入。譬如,用正压模式有时可以报出局部地区经向环流转为纬向环流、或纬向环流转为经向环流等变化;可以报出槽脊的新生或消失;可以报出变形场作气旋性或反气旋性的转变等等。这和过去认为在正压模式中系统不会发展,也不会有新生系统出现,是相矛盾的。

产生这些现象的原因在于:预报员所理解的气压系统的发展和绝对涡度系统的发展是不一致的。前者着重系统的弯曲程度、波幅和中心气压数值,而后者只着重涡度中心数值。由于涡度和气压数值并不是简单的一一对应关系,而气压系统的弯曲程度又不能完全代表涡度,在不均匀的流场中,一旦绝对涡度的分布发生了明显的变化,气压系统获得发展,甚至产生新生系统,看来是不足为奇的。

我们知道,涡度可以分为切变和曲率两部分。涡度变化是这两部分变化的和。在正压模式中,尽管绝对涡度守恒,但切变涡度和曲率涡度却可以不守恒,即使不考虑地转参数随纬度变化的作用也是如此。这样,它们之间有可能相互转化。如切变涡度转化为曲率涡度,则气压系统容易加强;如曲率涡度转化为切变涡度,则气压系统容易减弱。举一个例来说,在平直西风流场中涡度主要由切变造成,急流北侧有气旋性切变,其南侧有反气旋性切变。如由于某种原因,某部分切变涡度转化为曲率涡度,在西风带中就可能

\* 本文1963年1月22日收到,5月收到修改稿。

槽脊新生了。所以，在正壓模式中氣壓系統的發展問題，在相當程度上可以歸結為切變渦度和曲率渦度的相互轉換問題。

這種思想過去也有人提出或間接提出過。1957年 Hollmann<sup>[1]</sup>從運動方程出發，提出了一般的切變渦度和曲率渦度相互轉化的公式，還提出了在正壓情況下其相應的表達式。按照這些公式，當等高綫沿氣流方向匯合時，會引起曲率渦度增加；當等高綫沿氣流方向散開時，會引起切變渦度增加。可惜得很，這個結果和預報員的經驗正相反，在實際工作中難於應用。1960年 Lorentz<sup>[2]</sup>用正壓模式作了一個包含有兩個不同波長的簡單波的非綫性分析。結果表明，在這個模式中系統是可以分裂，也可以合併的。由於這種分裂或合併是明顯的，並且是系統性的，看來不會是計算誤差的結果。當然，這也不是什麼新東西。根據非綫性理論，兩個以上的波經過非綫性作用後是可以產生新波的。

在上面這些事實和工作的基礎上，作者從另一個角度出發，重新討論了切變渦度和曲率渦度相互轉化的問題。最後還找出一些預報規則供實際工作參考，或根據這些規則來診斷正壓預報的正確性。下面就是具體的推論。

## 二、切變渦度和曲率渦度的相互轉化

我們知道，正壓模式的渦度方程可以寫成

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi + f, \psi), \quad (1)$$

用  $A_\Omega$  表示方程右端，按照 Кибель<sup>[3]</sup> 和 Юдин<sup>[4]</sup>，我們有

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \int_{K_R} A_\Omega(M') G(M, M') d\sigma', \quad (2)$$

其中  $G(M, M') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$ ， $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ ， $K_R$  是以計算點  $M$  為中心，足夠大的  $R$ （如 1000 千米以上）為半徑所作的圓  $K_R$ ； $d\sigma'$  是面積元素；其他都是氣象上常用的符號。

對(2)式作  $y$  方向的微分我們有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{K_R} A_\Omega \frac{\partial G}{\partial r} \frac{y-y'}{r} d\sigma' = - \int_{K_R} A_\Omega \frac{\partial G}{\partial y'} d\sigma', \quad (3)$$

利用格林函數的特性和 Gauss 公式，則

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial y'} d\sigma' + \int_{\Gamma_K} A_\Omega G dx' = \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial y'} d\sigma', \quad (4)$$

其中  $\Gamma_K$  是  $K_R$  的圓周。

同理我們可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{K_R} G \frac{\partial^2 A_\Omega}{\partial y'^2} d\sigma' = F(x, y), \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma', \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} = - \int_{K_R} G \frac{\partial^2 A_\Omega}{\partial x'^2} d\sigma' = H(x, y). \quad (7)$$

为了求出切变涡度和曲率涡度的变化,我们令  $\mathbf{s}$  表示通过某点  $M$  的流线的切线方向的单位向量,  $\mathbf{n}$  表示其法线方向的单位向量, 指向流函数的低值为正; 并设  $\mathbf{s}$  和  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ , 气流的全速度为  $c$  (图 1). 于是

$$u = c \cos \alpha, \quad v = c \sin \alpha, \quad (8)$$

利用一般自然坐标和直角坐标间微商的关系

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial n}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial s} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial n}, \quad (10)$$

和用这些关系推出的涡度表达式

$$\zeta = \nabla^2 \psi = c \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial c}{\partial n}, \quad (11)$$

按 Hollmann, 可以定义

$$\left. \begin{aligned} \zeta_K &= c \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{c}{r}, \\ \zeta_s &= -\frac{\partial c}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中  $\zeta_K + \zeta_s = \zeta$ ,  $\zeta_K$  称曲率涡度,  $\zeta_s$  称切变涡度,  $\frac{1}{r} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$  是流线的曲率.

把(8)、(9)、(10)等式代入(4)、(5)、(6)、(7)等式并令  $\alpha = 0$ , 我们可以得到

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial y'} d\sigma', \quad (13)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{1}{c} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma', \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial c}{\partial s} - c \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial n} = F(x, y), \quad (15)$$

$$\left( \frac{\partial c}{\partial s} - c \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) = H(x, y). \quad (16)$$

引用定义(12), 把(13)式和(14)式代入(15)式和(16)式, 则我们得到

$$\frac{\partial \zeta_K}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial s} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' - \frac{\partial \alpha}{\partial n} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' + H(x, y), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial s} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' + \frac{\partial \alpha}{\partial n} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' - F(x, y). \quad (18)$$

方程(17)、(18)就是我们用来讨论  $\zeta_K$  和  $\zeta_s$  相互转化的方程.

把它们相加我们有

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_K}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} = - \int_{K_R} G \nabla^2 A_\Omega d\sigma'. \quad (19)$$

和推导(4)式的情况一样, 对上式重复作两式相反的运算, 则

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \nabla^2 \int_{K_R} G A_\Omega d\sigma' = A_\Omega.$$

可见, 上面的推导是合理的.

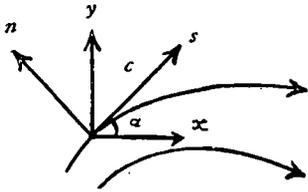


图 1

图中曲线表示流线, 箭头所指示的方向表示气流方向.

現在,我們來討論方程(17)、(18)和(19)。

首先,從前兩個方程可以看出,絕對渦度平流分布的不均勻是引起切變渦度和曲率渦度發生變化的原因。只有這兩種渦度的變化不同時為零才可能有渦度變化。按(19)式如果在計算區域內絕對渦度平流是一個常數或為一調和函數,則渦度變化處處為零。按(1)式,這要求絕對渦度平流也處處為零,即只有在絕對渦度處處為零或為一常數時渦度變化才等於零。

這個結果看起來令人奇怪。其實,這和我們假定了在邊界上  $\int_{\Gamma_R} \frac{\partial \psi}{\partial t} ds = 0$  有關。這個假定對於較小區域不一定合適,但對於較大區域則是允許的,並且在數值預報工作中常用,也證明對短期預報的影響是不大的。這說明在較大地區內絕對渦度平流總是分布不均勻的,因而經常有渦度變化,或曲率渦度和切變渦度的變化。

這幾種變化是互相關聯的。按(19)式,如渦度變化為零,曲率渦度和切變渦度的變化可以不為零。如果我們對(19)式作整個北半球  $\tilde{R}$  的積分,並設在赤道處南風為零,則

$$\int_{\tilde{R}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\sigma = \int_{\tilde{R}} \frac{\partial \zeta_K}{\partial t} d\sigma + \int_{\tilde{R}} \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} d\sigma = 0. \quad (20)$$

可見,在正壓模式中儘管總的渦度變化為零,但由於絕對渦度平流分布的不均勻,總的切變渦度和曲率渦度的變化卻不一定為零,並且

$$\int_{\tilde{R}} \frac{\partial \zeta_K}{\partial t} d\sigma = - \int_{\tilde{R}} \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} d\sigma. \quad (21)$$

我們知道,在緯向環流盛行時相對渦度主要表現為切變渦度,在經向環流盛行時曲率渦度則比較明顯,所以,在適宜情況下,因它們之間的相互轉化,是可以引起環流經向度發生明顯的變化的。不過,這種變化一般在程度上不及斜壓作用引起的大罷了。當然,即使總的切變渦度和總的曲率渦度的變化為零,在局部地區引起環流經向度發生明顯的變化的可能性還是有的。

對於局部地區我們可以應用方程(17)和(18)。

在這兩個方程的右端,其前兩項在形式上完全一樣,只是符號相反。這說明切變渦度和曲率渦度可以通過這兩項的作用相互轉化。所以,和上面的討論相似,在適宜的情況下曲率渦度可以轉變為切變渦度,使環流趨於平直,甚至使槽脊消失;也可以由切變渦度轉變為曲率渦度,使環流經向度加大。

至於這兩個方程右端最後一項,把它們相加即絕對渦度平流。這說明它是以前不同方式分含在這兩個方程中的。在不同的流場中,其分含的比例不同,其對這兩種渦度所產生的影響也不同;有時可以使它們同時增大或減小,有時也可以使某一種渦度增大,而使另一種渦度減小。

方程(18)還可以寫成

$$\frac{\partial \zeta_K}{\partial t} + c \frac{\partial \zeta_K}{\partial s} = -c \frac{\partial (\zeta_s + f)}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial s} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' - \frac{\partial \alpha}{\partial n} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' + F(x, y). \quad (22)$$

不难看出,上式右端四項的和不等於零,曲率渦度是不守恆的。在大氣中這種情形是容易

出現的。同理,也可以說明切变渦度不一定守恆。

### 三、在天气預报中的应用

方程(17)、(18)不难变成日常天气預报中可用的規則。

我們感兴趣的是方程(17)。在这一方程中  $\frac{\partial c}{\partial s}$  是气流速度沿气流方向的变化。因为  $\partial c/\partial s = -\partial^2\psi/\partial s\partial n$ , 当流綫散开时,  $\partial^2\psi/\partial s\partial n > 0$ , 即  $\partial c/\partial s < 0$ ; 当流綫汇合时,  $\partial^2\psi/\partial s\partial n < 0$ , 即  $\partial c/\partial s > 0$ 。  $\frac{\partial \alpha}{\partial n}$  是流綫沿法綫方向的方向变化。当流綫散开时,  $\partial \alpha/\partial n > 0$ ; 当流綫汇合时  $\partial \alpha/\partial n < 0$ 。由于一般  $c > 0$ , 所以, 不論渦度平流分布怎样, 方程(17)或(18)右端的前兩項的符号总是一致的。这对我們定性地考虑它們的作用带来了方便。

从这些討論, 我們可以得到如下的規則:

1) 不論流綫散开或汇合, 在正渦度平流中心附近地区, 曲率渦度和切变渦度都有利于随時間增加; 在負渦度平流中心附近地区, 曲率渦度和切变渦度都有利于随時間減小。

2) 在流綫散开的地区內, 如正(或負)渦度平流沿气流切綫方向(計算点  $M$  的切綫方向)減小(或增加)占优势, 有利于曲率渦度随時間增加, 切变渦度随時間減小; 如正(或負)渦度平流沿气流切綫方向增加(或減小)占优势, 有利于曲率渦度随時間減小, 切变渦度随時間增加。

3) 在流綫汇合的地区內, 如正(或負)渦度平流沿气流切綫方向增加(或減小)占优势, 有利于曲率渦度随時間增加, 切变渦度随時間減小; 如正(或負)渦度平流沿气流切綫方向減小(或增加)占优势, 有利于曲率渦度随時間減小, 切变渦度随時間增加。

如果我們要直接預报曲率变化, 則从方程(13)和(17)可以得到

$$c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial y'} d\sigma' + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial s} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' - \frac{\partial \alpha}{\partial n} \int_{K_R} G \frac{\partial A_\Omega}{\partial x'} d\sigma' + H. \quad (23)$$

可見, 使曲率渦度增加的項也有利于使曲率增加。但这时还应当增加兩条規則, 即

4) 在流綫呈气旋性弯曲的地区內, 如正(或負)渦度平流沿法綫(通过計算点  $M$  的法綫)方向減小(或增加)占优势, 有利于气旋性曲率增加; 如正(或負)渦度平流沿法綫方向增加(或減小)占优势, 有利于气旋性曲率減小。

5) 在流綫呈反气旋性弯曲的地区內, 如正(或負)渦度平流沿法綫方向減小(或增加)占优势, 有利于反气旋性曲率增加; 如正(或負)渦度平流沿法綫方向增加(或減小)占优势, 有利于反气旋性曲率減小。

### 四、推 广

上面的結果虽然只限于正压模式, 但对于斜压模式, 其所用的方法仍然适用。以二层模式为例, 按作者过去的推导<sup>[5]</sup>, 500 毫巴渦度預报方程可以写成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = A_{\Omega} + A_h + A_T, \quad (24)$$

其中

$$A_h = aJ(\nabla^2 \psi_T, \psi_T); \quad A_T = bJ(\psi, \psi_T);$$

$\psi_T$  是 500 毫巴到大氣低層某一等壓面之間的流函數差； $a$  和  $b$  都是大於零的常數；其他符號同前。仿照前面的方法，不難看出，只要用  $A_{\Omega} + A_h + A_T$  代替方程(17)、(18)中的  $A_{\Omega}$ ，則前面得到的結果仍然適用。對於預報規則，已有的除外，如用冷(或暖)平流和熱成風場的正(或負)熱成風渦度平流(即  $A_h$ )依次代替正(或負)渦度平流，還可以得到一些規則，這裡就不一一敘述了。

### 參 考 文 獻

- [1] Hollmann, G., The curvature and shearing vorticity equation, the direction and speed-divergence equation, Stockholm 國際數值預報會議 (1957).
- [2] Lorenz, E. N., Maximum simplification of the dynamic equations, *Tellus*, 12 (1960), no. 3, 243—254.
- [3] 基別爾, И. А., 短期天氣預報的流體力學方法引論(中譯本), 科學出版社, 1959.
- [4] Юдин, М. И., О прогнозе поля давления численными методами, *Труды ГГО*, вып. 71 (1957).
- [5] 廖洞賢, 論氣壓波和溫度波的移動, *氣象學報*, 33 (1963).

## THE TRANSFORMATION OF CURVATURE VORTICITY AND SHEARING VORTICITY IN BAROTROPIC ATMOSPHERE AND ITS APPLICATION TO WEATHER PREDICTION

LIAO TUNG-HSIEN

(Institute of Meteorological Science Research, Central Weather Bureau)

### ABSTRACT

From a large number of operational numerical predictions with the barotropic model, it is found that the development of the pressure systems at 500 mb isobaric surface can sometimes be well predicted to some extent, even though the zonal current is predominant in the initial stream field. On the other hand, it is well-known from synoptic experience that the development of pressure pattern is closely related to the change of curvature vorticity and shearing vorticity. Therefore, for the sake of investigating the problem of development, two equations for predicting the two quantities are derived. It can be shown that each of them is not conservative and they can be transformed into each other in confluent or defluent stream region under certain circumstances, regardless of the effect of variation of Coriolis parameter with latitude. From these results, the phenomena previously mentioned may be explained.

Finally, for the purpose of practical use, some rules for weather prediction are proposed herefrom.