

赤道地区大气的超长波波动*

杜行远 周紫东

(中央气象局气象科学研究所)

提 要

浅水波方程写在赤道 β 平面上并根据大气运动的平均状态线性化, 得到了线性化方程组的特征方程, 解出了它的特征根和特征向量。发现由于东风切变的存在, 可以产生自西向东传播的 Rossby 波。还给出了波数为 1 和 2 的一些超长波的图形。

最近几年, 在气象学中引入了正交波型法^[1-8], 这个方法把客观分析、初值化和数值预报用相同的数学程序作处理。在实际预报工作中使用的经验表明, 正交波型法用于初值化可以取得较好的结果, 特别是在中、高纬度地区更是如此。在低纬和赤道地区则效果较差。其原因可能在于所求得的正交波型在赤道地区与实际情况有较大的偏离。本文从考虑一个与实况较接近的大气基本状况出发, 试图在这方面有所改进。

对于一个三维的天气预报问题, 一般说来, 可以通过分离变量法把它作为在水平方向的二维问题和在垂直方向的一维问题的乘积来处理。因为垂直方向的一维问题比较容易解决, 因此, 研究工作者的注意力集中在解决二维问题上。这时, 出发方程可以采用正压大气的原始运动方程, 并且利用正交波型法对方程进行求解。

在求解过程中, 首先将原始运动方程组对大气运动的某种基本状态进行线性化。当大气的基本状态是静止时, 即平均纬向风速 $U=0$, 可以求得线性化方程组解析形式的正交波型, 这就是 Hough 函数。它们由三类波动所组成: 向西传播的 Rossby 波, 向西和向东传播的惯性重力波。然而, 实际大气的平均纬向风速并不是零, 它可能是纬度的任意函数。在这种情况下, 就很难找到线性化方程组的解析解, 它们的正交波型只能通过数值求解得到, 但对在所求得的正交波型中到底含有几类波型还不清楚。

数值解的结果表明, 除了上面谈到的三类波动以外, 还有第四类波型, 这就是向东传播的 Rossby 波。当采用的差分格式的精确度愈高截断误差愈小时, 一般说来, 这第四类波动就愈明显^[2]。因此, 我们没有充分理由把所有向东传播的 Rossby 波都简单地归结为计算波。

为了澄清这个问题, 必须寻求线性化方程组的解析解。然而, 具有任意平均纬向风速廓线的线性化方程组是找不到解析解的, 不过对这些方程组作一些简化后, 就有可能找到解析解^[4], 即使是过份的简化也是值得的。

在本文中, 我们把纬向风速切变取成常数, 并以 s 来表示。把方程组写在赤道 β 平面上, 所得到的解也只应用于南北范围很窄的赤道地区。我们取大气的有效高度 $H=10^4$

* 本文于 1980 年 11 月 1 日收到, 1981 年 6 月 11 日收到修改稿。

米, 于是重力波速 $C = \sqrt{gH} = 313$ 米/秒。取 $\beta = 2.28 \times 10^{-11}/(\text{秒} \cdot \text{米})$ 。注意这些假定, 我们就可以把线性化方程组写成如下的无量纲形式^[1],

$$\frac{\partial u}{\partial t} + s(y - y_c) \frac{\partial u}{\partial x} + v(s - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + s(y - y_c) \frac{\partial v}{\partial x} + yu + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + s(y - y_c) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - s(y - y_c) yv + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

这里, 时间单位取作 $(C\beta)^{-\frac{1}{2}} = 1.18 \times 10^4$ 秒, 水平长度单位取作 $\left(\frac{C}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.7 \times 10^6$ 米。于是取 $s = 0.07$, 相当于每千公里有 6 米/秒的平均风速切变^[9]。在副热带高压脊线 $y = y_c = 0.9$ 的平均位置上, 平均纬向风速为零; 在赤道 $y = 0$ 上, 平均纬向风速达到极大。

设解具有波动形式 $\exp(i\omega t + ikx)$, 于是它们的振幅满足以下的方程:

$$i\omega u + iks(y - y_c)u + (s - y)v + ik\varphi = 0 \quad (4)$$

$$i\omega v + iks(y - y_c)v + yu + \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad (5)$$

$$i\omega\varphi + iks(y - y_c)\varphi - sy(y - y_c)v + iku + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (6)$$

这里和以后, 除非给以说明, u, v 和 φ 都表示振幅。消去 u 和 φ , 得到振幅 v 的方程为:

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + (a_0 + a_1 y) \frac{dv}{dy} + (b_0 + b_1 y - y^2)v = 0 \quad (7)$$

其中:

$$a_0 = -\frac{2ks\omega}{\omega^2 - k^2};$$

$$a_1 = sy_c;$$

$$b_0 = \omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} + \left(1 - 2k\omega + \frac{k^2}{\omega^2}\right)sy_c;$$

$$b_1 = \left(1 + 2k\omega - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k^2} - \frac{k^2}{\omega^2}\right)s.$$

如果令 $s = 0$, 方程(7)式就恰好退化成为 Matsuno 的方程(6)式^[10]。

在(7)式中, 参数 s 是一个小量, 并且只保留它的一次项。包含 sy^2 小的高次项, 也因为我们只对赤道地区感兴趣而被忽略了。

借助变换

$$W = v \exp \left\{ \frac{1}{4} \left[a_1 + (4 + a_1^2)^{\frac{1}{2}} \right] y^2 + \left[\frac{a_0}{2} + (a_0 a_1 - 2b_1)/2 \times \right. \right. \\ \left. \left. (4 + a_1^2)^{-\frac{1}{2}} \right] y + \gamma \right\} \\ z = (4 + a_1^2)^{\frac{1}{4}} y + (a_0 a_1 - 2b_1)(4 + a_1^2)^{-\frac{3}{4}}$$

方程(7)能够写成标准形式:

$$\frac{d^2w}{dz^2} - z \frac{dw}{dz} + \left\{ b_0(4 + a_1^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2}(4 + a_1^2)^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[(a_0 a_1 - 2 b_1)^2 (4 + a_1^2)^{-\frac{3}{2}} - a_0^2 (4 + a_1^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} w = 0 \quad (8)$$

在 v 变换成 w 的过程中, 引进一个任意常数 γ 。

因为我们关心的是赤道附近(即 $y \approx 0$)的波动运动, 于是取边界条件

$$w \rightarrow 0, \text{ 当 } z \rightarrow \pm \infty \quad (9)$$

是合适的。在实际大气中, $|z|$ 是有上界的, 即南北两极的位置。因此, 边界条件与实际大气有相当大的出入, 但这个边界条件对较低频的波动解, 如超长波, 没有多大影响, 并且也为其它研究工作者如 Matsuno 等所采用^[10]。

要满足边界条件(9)的方程(8), 提出了一个特征值问题。方程(8)是 Hermite 方程, 条件(9)只有当(8)式左边第三项 w 的系数等于正整数或零时才能满足, 即要求

$$b_0(4 + a_1^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2}(4 + a_1^2)^{-\frac{1}{2}} + \\ \frac{1}{4} \left[(a_0 a_1 - 2 b_1)^2 (4 + a_1^2)^{-\frac{3}{2}} - a_0^2 (4 + a_1^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = n \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

因此, 我们得到以下的特征方程:

$$\omega^4 - 2 k s y_c \omega^3 - \left(k^2 + 2 n + 1 - \frac{s y_c}{2} \right) \omega^2 + k \omega + k^2 s y_c = 0 \quad (10)$$

在这里, 我们略去了包含 s^2 的高次项。

这个方程表示, 在经向波型给定的条件下, 频率与纬向波数的关系, 这就是我们需要的色散关系。

(10) 式是一个关于 ω 的四次代数方程, 给定 n 和 k 后就有四个根。以 $\omega_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示这四个根, 其相应的相速则为 $-\frac{\omega_i}{k}$ 。

在电子计算机上求出了(10)式的解。其中两个根 ω_1 和 ω_2 对应于两个惯性重力波, 一个向西传播, 另一个向东传播; 另外两个根 ω_3 和 ω_4 对应于向西和向东传播的 Rossby 波。

对不同的 n 和 k , 四个根的数值列于表 1 中。

在表 1 中, 我们给出了 $k=0.5, 1, 2, 3, 4, n=0, 1, 2, 3, 4$ 的情况。波数 $k=0.5$ 时, 其波长为

$$\frac{2\pi}{k} \times \left(\frac{C}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 4 \times 10^6 \text{ 米}$$

相当于赤道的周长, 它是沿着赤道, 绕地球一圈, 波数为 1 的超长波。

在求出了方程(10)的特征值以后, 就可以讨论方程(8)的解。(8)式的特征函数是抛物线柱函数 $D_n(Z)$ ^[11]

$$D_n(Z) = (-1)^n \exp\left(\frac{Z^2}{4}\right) \frac{d^n}{dZ^n} \left(\exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right) \right); \\ D_0(Z) = \exp\left(-\frac{Z^2}{4}\right);$$

表 1 各类频率随 n 和 k 的变化

ω	$k \backslash n$	0	1	2	3	4
ω_1	0.5	0.77	1.74	2.27	2.68	3.04
	1	1.04	1.92	2.42	2.82	3.17
	2	2.12	2.61	3.01	3.35	3.65
	3	3.19	3.52	3.82	4.09	4.35
	4	4.26	4.51	4.74	4.96	5.17
ω_2	0.5	-1.24	-1.84	-2.30	-2.69	-3.03
	1	-1.55	-2.05	-2.46	-2.82	-3.14
	2	-2.28	-2.65	-2.98	-3.28	-3.55
	3	-3.11	-3.39	-3.66	-3.89	-4.14
	4	-3.99	-4.21	-4.43	-4.63	-4.83
ω_3	0.5	0.564	0.183	0.121	0.0928	0.0765
	1	0.692	0.308	0.217	0.172	0.144
	2	0.515	0.384	0.313	0.268	0.236
	3	0.433	0.376	0.335	0.304	0.280
	4	0.388	0.358	0.334	0.313	0.296
ω_4	0.5	-0.0294	-0.0269	-0.0250	-0.0235	-0.0223
	1	-0.0567	-0.0522	-0.0488	-0.0461	-0.0439
	2	-0.101	-0.0948	-0.0899	-0.0858	-0.0823
	3	-0.132	-0.126	-0.121	-0.116	-0.113
	4	-0.153	-0.148	-0.144	-0.140	-0.136

$$D_1(Z) = Z \exp\left(\frac{-Z^2}{4}\right),$$

$$Z D_n(Z) = D_{n+1}(Z) + n D_{n-1}(Z)$$

等等。于是关于振幅方程(4)~(6)式的解可以写成形式

$$v = \exp\left(-\nu - \frac{a_0}{2}y - \frac{a_1}{4}y^2\right) D_n\left(\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}b_1\right),$$

$$u = \frac{i}{k(1-a^2)} \exp\left(-\nu - \frac{a_0}{2}y - \frac{a_1}{4}y^2\right) \left\{ \left[\left(\frac{\omega}{k} - \frac{a_1}{2} - 1 \right) y - \alpha s + \frac{b_1 - a_0}{2} \right] D_n\left(\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}b_1\right) + \sqrt{2} n D_{n-1}\left(\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}b_1\right) \right\},$$

$$\varphi = \frac{i}{k(1-a^2)} \exp\left(-\nu - \frac{a_0}{2}y - \frac{a_1}{4}y^2\right) \left\{ \left[\frac{\omega}{k} S(y - y_c) y + \frac{\alpha a_1}{2} y + s + (\alpha - 1) y - \alpha \frac{b_1 - a_0}{2} \right] D_n\left(\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}b_1\right) - \sqrt{2} n \alpha D_{n-1}\left(\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}b_1\right) \right\}$$

其中 $\alpha = \frac{\omega}{k} + s(y - y_c)$ 。包含 s^2 的高次项也被忽略了。

值得注意,在高低气压系统邻接的地方, u 和 φ 同位相,而 v 与 φ 却有 $\frac{\pi}{2}$ 的位相差。这些天气学事实是通过在上述方程中引入一个虚数 i 来加以考虑的。

在下面进行的计算中,取 $i(\omega^2 - k^2) = \exp(-\gamma)$ 。

振幅 v 乘以 $\sin kx$, u 和 φ 乘以 $\cos kx$ 就得到不同波型的风场和位势高度场。 $k=0.5$, $n=1$ 和 $k=n=1$ 时向东传播的 Rossby 波的流型分别绘在图 1 和图 2 中。在图中,风速矢用箭头表示,箭杆长度比例于风速,等位势线用实线表示。南北范围从 $y=-0.36 \sim 0.36$, 东西范围取在赤道上纬圈的长度,因此,在图 1 和图 2 中分别为一个波 ($k=0.5$) 和两个波 ($k=1$) 的超长波。

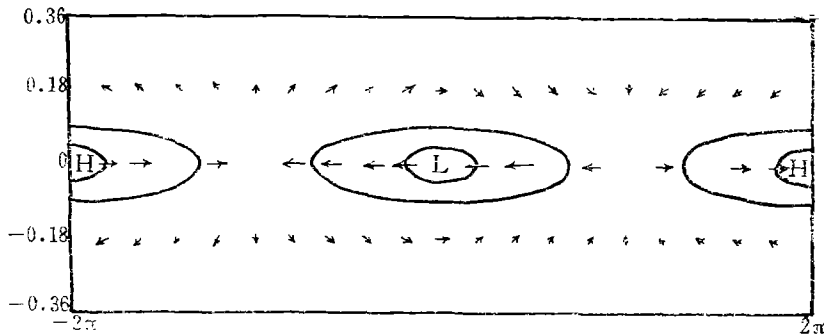


图 1 $k=0.5, n=1$ 时向东传播的 Rossby 波

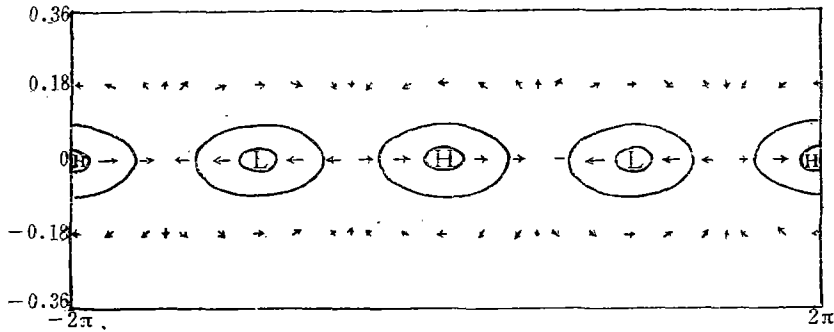


图 2 $k=1, n=1$ 时向东传播的 Rossby 波

向东传播的 Rossby 波是赤道地区所特有的波动,它与中高纬度的波动有相当大的差别。图 1 和图 2 表明,这类波动的振幅从赤道向南北两个方向迅速衰减为零,并且出现较大的地转偏差。有趣的是赤道低(高)压环流的北半面是顺(逆)钟向的,而南半面则相反。

应该指出,当 s 趋于零时,方程(10)的四个根中有一个趋于零,即 $\omega_4=0$,其它三个解则与文献[10]中所得到的完全相同。初看起来,我们似乎是多出了一个 $\omega=0$ 的解,然而在实际上,它却是并不存在的,因为只要把 $\omega=0$ 代入振幅方程(4)~(6)中,并令 $s=0$,就可以发现,所有的振幅都为零,即无任何波动存在,方程也都完全满足。因此, $\omega_4=0$ 是方程(4)~(6)在 $s=0$ 时的退化解,它的意义是大气的基本状态也是满足方程的。一般说来, $s \neq 0$, 我们有 $\omega_4 \neq 0$, 从而得到了一个向东传播的 Rossby 波,并且具有有限的振幅。结论是:向东传播的 Rossby 波是由东风切变引起的。当切变趋于零时,它的频率和振幅也随之趋于零。

东风切变也影响其它三类波动的频率和振幅,但都只是数量上的改变,其性质仍和 $s=0$ 时由 Matsuno 得到的解的性质相同,所以在这里就不再给出这些结果。

除了上面谈到的波动以外,还有一类 Kelvin 波。Kelvin 波的径向风速分量 $v=0$ 。为了得到这类波动,我们首先在方程(4)~(6)中令 $v=0$,因而得到

$$\{\omega + ks(y - y_c)\}u + k\varphi = 0 \quad (4a)$$

$$yu + \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad (5a)$$

$$ku + \{\omega + ks(y - y_c)\}\varphi = 0 \quad (6a)$$

从(4a)和(6a)我们得到

$$-\frac{k\varphi}{u} = -\frac{ku}{\varphi} = \omega + ks(y - y_c)$$

因而 $\varphi = \pm u$

代入(5a)得到

$$\varphi = u = \text{const} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

另一个解 $\exp\left(\frac{y^2}{2}\right)$ 由于不满足边界条件而被丢掉了。

因此,色散关系为

$$\omega = -k - ks(y - y_c)$$

显然, Kelvin 波也由于东风切变而有所改变。

为定量地说明切变 s 对相速的影响,我们计算了切变 s 引起超长波相速的改变。 $n=1, k=0.5$ 和 $n=0, k=0.5$ 时的结果分别列于表 2 和表 3 中, $n=1, k=1$ 和 $n=0, k=1$ 时的结果分别列于表 4 和表 5 中。在这些表中,我们也给出了 Kelvin 波的相速改变。

表 2 $n=1, k=0.5$ 时切变 s 对相速的影响

波 型	相 速		
	$s=0$	$s=0.07$	改变量
W. G.	-3.44	-3.48	-0.04
E. G.	3.75	3.67	-0.08
W. R.	-0.310	-0.367	-0.06
E. R.	0	0.0537	0.05
Kelvin	1	0.937	-0.063

表 3 $n=0, k=0.5$ 时切变 s 对相速的影响

波 型	相 速		
	$s=0$	$s=0.07$	改变量
W. G.	-1.56	-1.53	0.03
E. G.	2.56	2.48	-0.08
W. R.	-1.00	-1.13	-0.13
E. R.	0	0.0588	0.06
Kelvin	1	0.937	-0.063

表 4 $n=1, k=1$ 时切变 s 对相速的影响

波 型	相 速		
	$s=0$	$s=0.07$	改变量
W. G.	-1.86	-1.92	-0.06
E. G.	2.11	2.05	-0.06
W. R.	-0.25	-0.31	-0.06
E. R.	0	0.06	0.06
Kelvin	1	0.937	-0.063

表 5 $n=0, k=1$ 时切变 s 对相速的影响

波 型	相 速		
	$s=0$	$s=0.07$	改变量
W. G.	-1.00	-1.04	-0.04
E. G.	1.62	1.55	-0.07
W. R.	-0.62	-0.69	-0.07
E. R.	0	0.07	0.07
Kelvin	1	0.937	-0.063

L. Bengtsson博士, K. R. Johannessen博士, S. Tibaldi博士, 叶笃正教授和庄逢甘教授对本工作提供了宝贵意见, 作者表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 周紫东、狄新武、杜行远, 赤道地区大气波动的理论分析, 《中国科学》, 1980年, 第5期。
- [2] 狄新武、周紫东、杜行远, 球坐标中原始运动方程的自由振动, 气象学报, 39, No. 4, 416—428。
- [3] Du Xing-yuan, A review of the normal mode initialization method, Technical Report No. 20, 1980. European Centre for Medium Range Weather Forecasts. Available from ECMWF.
- [4] Du Xing-yuan, Zhou Zi-dong, On the effect of easterly shear on the atmospheric waves in the equatorial zone. Proc. WMO/FGGE Symp. June, 1980, Bergen.
- [5] Bengtsson, L., A summary to the numerical weather prediction progress report [for 1979, 1980, Available from WMO.
- [6] Temperton, C., Normal modes of a barotropic version of the-ECMWF gridpoint model. Internal Report No. 12, 1977. European Centre for Medium Range Weather Forecasts. Available from ECMWF.
- [7] Temperton, C. and Williamson, D. [L., Normal mode initialization [for a multi-level gridpoint model. Technical Report [No. 11, 1979, European Centre for Medium Range Weather Forecasts. Available from ECMWF.
- [8] Andersen, J. H., A routine for normal mode initialization with non-linear correction for a multi-level spectral model with triangular truncation. Internal Report [No. 15, 1977, European Centre for Medium Range Weather Forecasts. Available from ECMWF.
- [9] Loyd, J. P., The effects of latitudinal shear on equatorial waves. *J. Atmos. Sci.*, 35, 2236—2267, 1978.
- [10] Matsuno, T., Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. *J. Met. Soc. Japan.*, 44, 25—43, 1966.
- [11] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, 1965。

ON THE ULTRA-LONG WAVES IN THE EQUATORIAL ZONE

Du Xing-yuan Zhou Zi-dong

(Academy of Meteorological Science, Central Meteorological Bureau of China)

Abstract

The shallow water equations written in an equatorial β -plane are linearized around the mean state of the atmospheric motion. An eigenproblem is derived. Its eigenvalues and eigenvectors are calculated. It is shown that a propagating eastward Rossby wave may be induced by the easterly wind shear. Some of the ultra-long wave patterns are also drawn.