第41卷 第1期 气象学报 Vol. 41, No. 1
1983年2月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Feb., 1983

向量场的经验正交展开及其应用*

周紫东 王五在 杜行远

(国家气象局气象科学研究院)

提 要

本文提出了一种向量场经验正交展开的方法。我们对$N\times T$个离散点上的向量所构成的一个$N\times T$维矩阵,设法寻找一组称为经验正交函数的向量,使其中每一个分量都在均方意义下最接近矩阵的每一列。这组向量可以从特征方程确定。对于有N列元素的矩阵(注意每一个元素都是一个向量),有不少于N个经验正交函数分量。用这些分量所作向量场的正交展开级数收敛很快。给出的展开实际例子说明:向量场经验正交展开,可以比一般标量场经验正交展开,取得更好的效果。

一、引　　言

近年来,在数值天气分析和预报中,经验正交函数得到越来越多的应用[1-7],经验正交函数的一个特点,是它可以与气象资料更密切地结合起来,不仅展开系数,而且连正交函数本身都是根据气象资料在展开过程中确定的。这样,用经验正交函数展开,不仅展开函数的气象意义明确,而且展开级数的收敛速度比任何其它正交函数展开的收敛速度要快得多,所需保留的项数,要比其它任何正交展开中的项数为少,这就能大大地压缩信息量,从而带来很大的方便。此外,经验正交函数还可以对任意不规则的离散点进行展开,比许多正交展开具有更多的灵活性。

然而,不少的气象要素场,却是向量场,如风场,位移场等。在气象中常见的位移场有副热带高压中心,台风中心,气旋中心等。如何对向量场进行经验正交展开?1973年,作者[8-10]提出把向量写成二维数(即复数的代数式)后进行展开的方法,1977年,D. M. Hardy[11-12]提出把向量写成复数的指数形式后进行展开的方法,本文给出并完善了1973年的工作,并以风场为例讨论了如何把对标量场进行经验正交函数展开的方法推广到向量场的展开中去,并且给出了应用这种展开法的实例。

二、向量场的经验正交展开

我们讨论如何对风场W进行经验正交展开的问题,设这个场共有$N\times T$个数据,记做

* 本文于1981年3月26日收到,1982年2月1日收到修改稿。

w_{NT}，注意 w_{NT} 是一个向量，它的第一个下标可以表示测站所在位置，共有N个测站，像这样的观测共有T组，由 w_{NT} 的第二个下标表示。我们要求出向量正交函数，它在均方意义下与T组观测值中之任一组最接近。可以把$N\times T$个离散点上的向量组成关于元素为二维数的$N\times T$维的资料矩阵 w

$$W=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12}\cdots\cdots w_{1T} \\ w_{21} & w_{22}\cdots\cdots w_{2T} \\ \vdots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2}\cdots\cdots w_{NT} \end{bmatrix} \tag{1}$$

w 的元素 $w_{kj}=u_{kj}+iv_{kj}$，　$i=\sqrt{-1}$。

设有N维向量 φ，它与矩阵 w 中的每一列在均方意义下最接近。记向量 φ 与 w 的内积为(φ,w)。w在均方意义下最接近 φ 意味着

$$L=(\varphi,w)\overline{(\varphi,w)}=\varphi^*ww^*\varphi \tag{2}$$

达到极大。这里及以后，字母右上角的‘ * ’为共轭转置符号，字母上方的‘—’为共轭符号。

引进矩阵 w 的相关矩阵G，它定义为：

$$G=ww^* \tag{3}$$

于是(2)式可以写成

$$L=\varphi^*G\,\varphi \tag{4}$$

我们选取向量φ，使得L在 $\varphi^*\varphi=1$ 的条件下达到极大值。这就提出了一个求条件极值的变分问题。利用拉格朗日乘数法，把它变成一个无条件极值的变分问题。以 λ 表示某一待定常数，于是可把问题归结为求$N\times N$维矩阵G的特征值和特征向量问题。即求

$$G\varphi=\varphi\lambda \tag{5}$$

的特征值和特征向量。G的元素为

$$g_{kj}=\sum_{m=1}^{T}(u_{km}+iv_{km})(u_{jm}-iv_{jm}) \tag{6}$$

g_{kj} 的共轭复数为 $\bar{g}_{kj}$，易见 $g_{kj}=\bar{g}_{jk}$。因此矩阵G等于它的共轭转置矩阵 G^*，所以G是 Hermite 矩阵。相关矩阵 G^* 可以是降秩的，因而G是半正定的。对于$N\times N$维的半正定的 Hermite 矩阵来说，共有不大于N个实的特征值。与特征值相对应的特征向量互相正交，并且可以以这些特征向量为列，组成一个$N\times N$维的酉矩阵。于是有

$$GB=BD \tag{7}$$

$$B^*B=E \tag{8}$$

E为单位矩阵，D为对角线矩阵。D的元素 $\lambda_n(n=1,2,\cdots N)$ 都是G的特征值，并且按其大小顺序依次排列，即 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$。对于酉矩阵$B$，它的共轭转置矩阵就是它的逆矩阵，并且当它的元素的虚部都为零时，就退化为正交矩阵。

定义一个 $N\times T$ 维的系数矩阵 C，即

$$C=B^*w \tag{9}$$

则有

$$CC^*=B^*GB=D \tag{10}$$

(10)式表明，系数矩阵 C 是行与行之间正交的。对于 C 的每一行向量 C_μ，有

$$C_\mu C_\mu^*=\lambda_\mu$$

所以，用 N 个分量来进行经验正交展开时，展开系数的方差为

$$\sigma^2=\sum_{\mu=1}^{N}C_\mu C_\mu^*=\sum_{\mu=1}^{N}\lambda_\mu$$

第 γ 个分量对方差 σ^2 的贡献为

$$\sigma_\gamma^2=\lambda_\gamma/\sigma^2$$

由(9)式，我们有向量场的经验正交展开式

$$w=BC \tag{11}$$

或

$$w_{jk}=\sum_{m=1}^{N}B_{jm}C_{mk} \tag{11a}$$

令

$$\left.\begin{aligned}w&=U+iV\\B&=B_R+iB_I\\C&=C_R+iC_I\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

得到分量 U、V 的展开形式为

$$\left.\begin{aligned}U&=B_RC_R-B_IC_I\\V&=B_RC_I+B_IC_R\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

于是，可以根据(11)式或(13)式将离散的向量场进行经验正交展开。展开式中 B 的每一列列向量称为经验正交函数分量。

在形式上，展开式(11)与一般标量场的经验正交展开完全相同，不过在(11)式中，w，B 和 C 的元素都为二维数。

Hermite 矩阵 G 的特征值和特征向量可以利用解复特征值问题的减模 Jacobi 方法同时求出来[13]。

在电子计算机上求 G 的特征值和特征向量时，会碰到 $N\gg T$ 的情况，这时可以通过矩阵变换，大大节省计算工作量。为此，先求 $T\times T$ 维的相关矩阵 $\hat{G}=w^*w$ 的特征值和特征向量，然后再根据矩阵的某种转换关系求出 $N\times N$ 维矩阵 G 的特征值和特征向量来。

将矩阵 $\hat{G}$ 的特征值按大小顺序排列好，组成对角线矩阵 $\hat{D}$，其相应的特征向量组成的酉矩阵为 $\hat{B}$，则有

$$\hat{G}\hat{B}=\hat{B}\hat{D} \tag{14}$$

$$\hat{B}^*\hat{B}=E \tag{15}$$

不难证明 $\hat{G}$ 和 G 的秩相等，并且都不大于 T，而 $\hat{D}$ 的非零元素和 D 的非零元素相等。由(14),(15)式，有

$$\hat{B}^*\hat{G}\hat{B}=\hat{D} \tag{16}$$

(16)式两边右乘 $T\times T$ 维矩阵 $\hat{B}^*$，再左乘 $T\times T$ 维矩阵 $\hat{D}^{-\frac{1}{2}}$，因为 $\hat{D}$ 的非零元素为大于零的实数，所以 $\hat{D}^{-\frac{1}{2}}$ 是存在的。这样，得到

$$\hat{D}^{-\frac{1}{2}}\hat{B}^*\hat{G}=\hat{D}^{-\frac{1}{2}}\hat{D}\hat{B}^* \tag{16a}$$

注意到 $(\hat{D}^{-\frac{1}{2}})^*=\hat{D}^{-\frac{1}{2}}$，(16a)可以写成

$$(w\hat{B}\hat{D}^{-\frac{1}{2}})^*w=\hat{D}^{-\frac{1}{2}}\hat{D}\hat{B}^*$$

令 $N\times T$ 维矩阵 $\tilde{B}=w\hat{B}\hat{D}^{-\frac{1}{2}}$，上式右乘 $T\times T$ 维矩阵 $w^*\tilde{B}$，结合(3)、(6)两式，得到

$$\tilde{B}^*G\tilde{B}=\hat{D}\quad \text{或}\quad G\tilde{B}=\tilde{B}\hat{D} \tag{17}$$

因此，对 Hermite 矩阵 G，还存在另一酉矩阵 $\tilde{B}$，使得通过上述相似变换，化成对角矩阵 $\hat{D}$。

比较(17)式和(7)式，注意到 $\hat{D}$ 和 D 中的非零元素相等，所以与特征值相对应的酉矩阵 $\tilde{B}$ 和 B 中的特征向量是一一相等的。这里，我们所得到的结果与(2)中的结果在形式上完全一致。所以可以从 $\hat{G}$ 求得的特征值和特征向量按下式进行经验正交展开，即

$$w=\tilde{B}\tilde{C} \tag{18}$$

$$\tilde{C}=\hat{D}^{\frac{1}{2}}\hat{B}^* \tag{19}$$

应该指出，在对向量场具体进行经验正交展开时，还可以采用另一种计算形式，因为

$$U+iV=(B_RC_{RU}+B_IC_{IU})+i(B_RC_{RV}+B_IC_{IV})$$

于是

$$\left.\begin{aligned}U&=B_RC_{RU}+B_IC_{IU}\\ V&=B_RC_{RV}+B_IC_{IV}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中：$C_{RU}=B'_RU$，$C_{IU}=B'_IU$，$C_{RV}=B'_RV$，$C_{IV}=B'_IV$。‘′’为转置符号。

三、收敛速度的分析

仍以风场为例，对以上的展开方法的收敛速度问题作一些定性分析。取以下 2×2 维的简单情形，即

$$w=\begin{bmatrix} u_1+iv_1 & u_2+iv_2 \\ u_3+iv_3 & u_4+iv_4 \end{bmatrix} \tag{21}$$

则

$$G=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

其中：

$$g_{11}=u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2$$

$$g_{12}=u_1u_3+v_1v_3+u_2u_4+v_2v_4+i(u_3v_1-u_1v_3+u_4v_2-u_2v_4)$$

$$g_{21}=u_1u_3+v_1v_3+u_2u_4+v_2v_4-i(u_3v_1-u_1v_3+u_4v_2-u_2v_4)$$

$$g_{22}=u_3^2+u_4^2+v_3^2+v_4^2$$

G的两个特征值的近似值分别为

$$\lambda_1\simeq\sum_{j=1}^{4}(u_j^2+v_j^2)-S\Big/\sum_{j=1}^{4}(u_j^2+v_j^2)$$

$$\lambda_2\simeq S\Big/\sum_{j=1}^{4}(u_j^2+v_j^2)$$

$$S=(v_1v_4-v_2v_3)^2+(u_1u_4-u_2u_3)^2+(u_1v_4-u_3v_2)^2+$$

$$+(u_2v_3-u_4v_1)^2-2\,(u_3v_1-u_1v_3)(u_4v_2-u_2v_4)$$

离散的向量场经验正交展开的收敛速度取决于诸经验正交函数分量对方差的贡献。对两个分量的情况，它取决于差 $\delta=\left\{\sum_{j=1}^{4}(u_j^2+v_j^2)-2S\right\}\Big/(\lambda_1+\lambda_2)$。$\delta$ 愈大，收敛愈快。δ 的大小则与展开流场的能量和速度分量的分布情况有关。能量愈大的展开流场，收敛愈快；展开流场的数值和方向的分布愈均匀，收敛也愈快。因此，对于气象问题，一般说来，冬季流型展开的收敛速度要比夏季流型展开的收敛速度快些，因为前者的动能比后者大；在同一季节内平直纬向流型展开的收敛速度要比经向流型展开的收敛速度快些，因为前者南北风 v 改变方向的范围和程度比后者小得多。

四、展 开 的 实 例

选取 1979 年 1 月 15 日— 17 日北京时 20 点我国的探空测风资料作为展开场。分别取 43 个、41 个和 40 个测站，每个测站在垂直方向取 8 层（包括 1000，850，700，500，400，300，200 和 100 毫巴）上的资料。在资料覆盖的地区，这三天内盛行平直西风。利用(20)式沿垂直方向进行展开。因为垂直方向取 8 层，因此有 8 个特征值，并有与之相应的 8 个经验正交函数分量。

表 1　向量场经验正交展开诸分量的特征值及其对方差的贡献

分量	贡献 ＼ 日期	15 日	16 日	17 日
1	λ_1	2269.464	3104.898	3021.236
	σ_1^2	0.953	0.933	0.925
2	λ_2	64.934	98.866	108.540
	σ_2^2	0.019	0.030	0.033
3	λ_3	34.406	62.947	52.892
	σ_3^2	0.010	0.019	0.016
4	λ_4	24.176	25.474	29.039
	σ_4^2	0.007	0.008	0.009
5	λ_5	14.715	12.755	23.652
	σ_5^2	0.004	0.004	0.007
6	λ_6	10.381	10.256	16.351
	σ_6^2	0.003	0.003	0.005
7	λ_7	8.425	7.315	10.863
	σ_7^2	0.003	0.002	0.003
8	λ_8	3.589	4.391	3.708
	σ_8^2	0.001	0.001	0.001

采用减模 Jacobi 法所求得的诸特征值 $\lambda_\mu(\mu=1,2,\cdots,8)$，列在表 1 中。第 γ 个分量对方差的贡献 σ_γ 也同时列在表 1 中。

为了进一步考察向量场展开的实际效果，我们把 1 月 17 日的资料展开中的前三个经验正交函数分量的和绘在图 1 和图 2 上。相应的实况图则分别绘在图 3 和图 4 上。为了比较，还把相应标量场 u 和 v 经验正交展开中前三个分量的和绘在图 5 和图 6 上。可以看到，在实况图 3 上，我国西南地区有一强西风中心，在标量展开的拟合图 5 上没有出现而在向量展开的拟合图 1 上出现了，只是强度还不够。比较图 2 、图 4 和图 6 ，也可以看出，在实况图 4 上广东有一南风中心，在标量的展开图 6 中没有出现，而在向量的展开图 2 中出现了。实况图 4 上，河套为很强的北风区，向量展开的拟合也比标量场展开拟合的较好。以上这些细节都说明，本文所提出的向量场经验正交展开方案，可以比一般标量场经验正交展开，取得更好的效果。

五、结　束　语

本文提出的向量场经验正交展开的方法，是标量场经验正交展开的自然推广，它不仅在物理上更符合气象问题的特点，也保持了经验正交展开级数收敛快的优点，因此，它是一种浓缩庞杂的气象信息的有效方法。它的展开过程简单，只需要解一次特征值问题，从而可以节省很多计算工作量。所有这些，使得它能在气象科学中找到广泛的应用。

"随着技术的发展，具有较复杂性质的对象常具有较大的价值"[14]。向量场的经验正

交展开是在气象科学和计算技术发展的前提下，在较简单的标量经验正交展开的基础上提出来的。随着科学技术的进一步发展，一些更为复杂的问题，如三维空间中不规则离散点上向量场的展开问题也必然会不断地提出来，这时，我们可以利用比二维数更为复杂的广义数——四维数来处理这个问题，因为数学家已经建立了完整的四维数间的运算规则，我们不难利用类似二维数展开的方法来讨论四维数的展开，因此，这类处理方法有着一定的应用潜力。

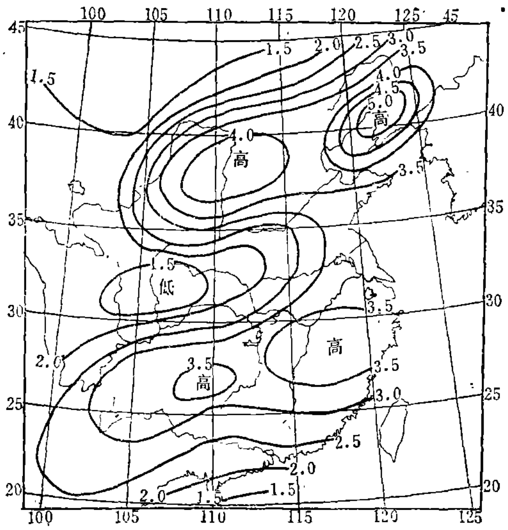

图 1　1979.1.17，20 点，前三个向量场经验正交函数拟合 500 毫巴的 u 分量(什米/秒)

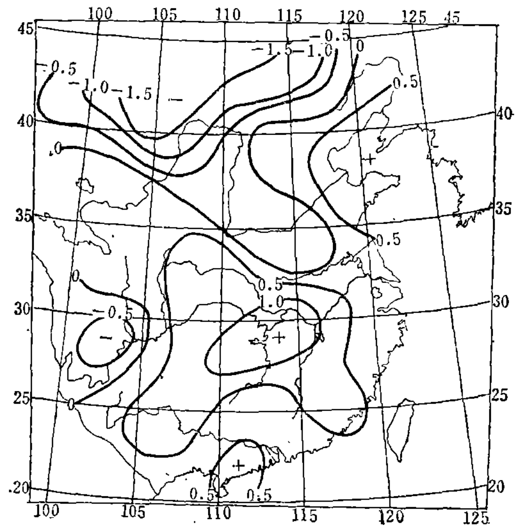

图 2　1979.1.17，20 点，前三个向量场经验正交函数拟合 500 毫巴的 v 分量(什米/秒)

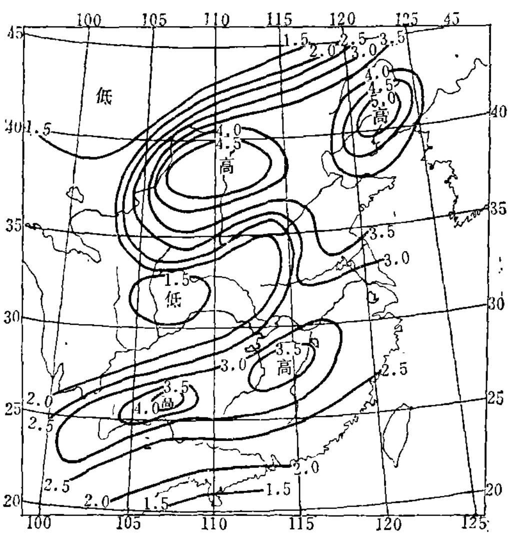

图 3　1979.1.17，20 点，500 毫巴的实况 u 分量(什米/秒)

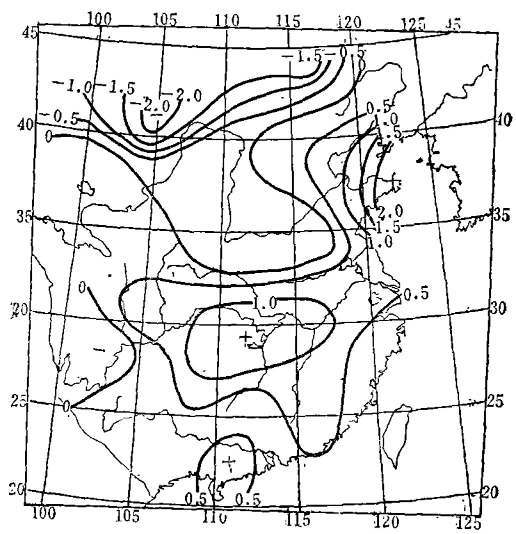

图 4　1979.1.17，20 点，500 毫巴的实况 v 分量(什米/秒)

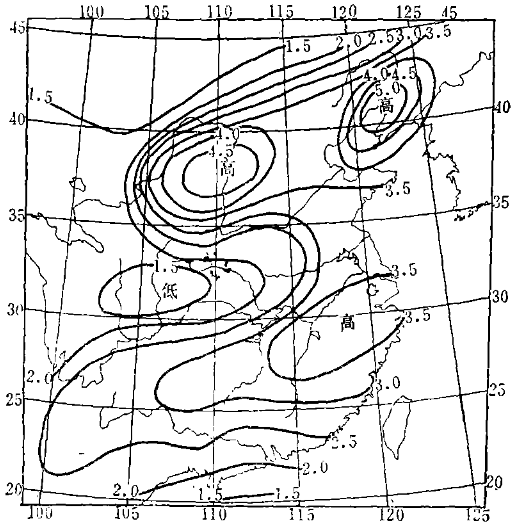

图 5　1979.1.17,20 点，前三个标量场经验正交函数拟合 500 毫巴的 u 分量(什米/秒)

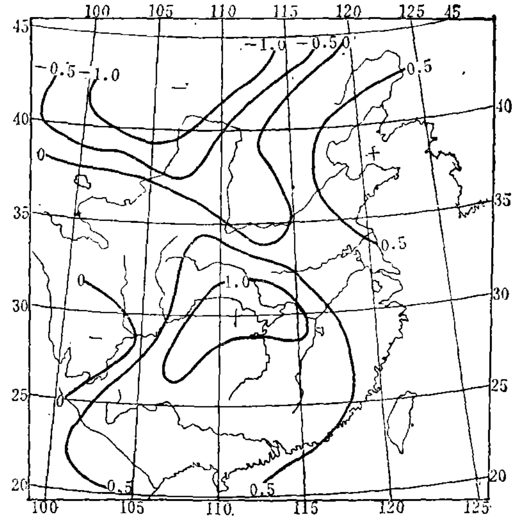

图 6　1979.1.17,20 点，前三个标量场经验正交函数拟合 500 毫巴的 v 分量(什米/秒)

参 考 文 献

[1] 章基嘉、孙照渤、陈松军，对自然正交函数稳定性条件的讨论，气象学报，**39**，No. 1，82—89 1981。

[2] 郑庆林，杜行远，使用多时刻观测资料的数值预报新模式，数值预报和数理统计预报会议论文集，科学出版社，1974。

[3] 许乃猷、张家诚、赵溱，北太平洋海表温度距平场变化因子与大气环流关系的初步研究，海洋学报 2，No. 1，17—32，1980。

[4] Flattery, T., Spectral models for global analysis and forecasting. Proc. Sixth AWS Technical Exchange Conf., U. S. Naval Academy, 1970, *Air Weather Service Technical Report* **242**, 42—54, 1971.

[5] Holmostrom, I., On empirical orthogonal functions and variational methods, Workshop on the use of e. o. f. in Meteorology, ECMWF, 21—26, 1977.

[6] Karhila, V. and J., Rinne, Determination of empirical orthogonal functions from a large sample, Workshop on the use of e. o. f. in Meteorology, ECMWF, 84—96, 1977.

[7] Barnett, T. P., The principal time and space scales of the Pacific trade wind fields, *J. Atmos. Sci.*, **34**, 221—235, 1977.

[8] 中央气象局研究所二室，二维数在天气预报中的应用(油印本)1973。

[9] 中央气象局研究所二室，副热带高压主体的长期预报(油印本)，1973。

[10] 中央气象局研究所二室，台风登陆地点、时间和源地的年度预报(油印本)，1973。

[11] Hardy, D. M. and J. J. Walton, Principal components analysis of vector wind measurements, *J. Appl. Meteor.*, **17**, 1153—1162, 1978.

[12] Hardy, D. M., Empirical eigenvector analysis of vector observations, *Geophs. Res. Lett.*, **4**, 319～320, 1977.

[13] Eberlein, P, J., Solution to the complex eigenproblem by a norm reducing jacobi type method, *Numer. Math.*, **14**, 232—245, 1970.

[14] 亚历山大洛夫等，数学——它的内容、方法和意义——第三卷，科学出版社，1962。

THE EMPIRICAL ORTHOGONAL EXPANSION FOR A VECTOR FIELD AND ITS AP-PLICATION TO METEOROLOGY

Zhou Zidong, Wang Wuzai, Du Xingyuan

(Academy of Meteorological Science, national Meteorological Bureau)

Abstract

In this paper, a method of empirical orthogonal expansion for a vector field is proposed. The vector values at $N \times T$ points form a $N \times T$ matrix. We can find the vector empirical orthogonal functions which approximate each column of the matrix more accurately in the light of root mean square error. This can be done by solving a complex eigen-value problem. There are N empirical orthogonal functions for a matrix of N columns. The meteorological vector field may be expanded into its empirical orthogonal functions. Examples of such vector expansion are given in this paper. It has been clearly shown that better results can be obtained by vector expanison as compared with ordinary scalar expansion.