大气边界层中湍流扩散问题的随机微分方程处理*

叶文虎　卢崇飞　张霭琛

(北京大学)

提　　要

本文在对湍流扩散机理进行分析的基础上，提出用ITÔ·K 随机微分方程来描述湍流扩散过程，并导出了大气边界层中连续点源扩散浓度分布的一般形式。其一级近似可以用初等函数来表示，它的特例与污染气象学中常用的模式是一致的。

另外，本文所给出的一般形式还可以包容地转风和重力沉降等作用对扩散的影响，并具体给出了它的一级近似表达式。

一、引　　言

为便于阐述问题，有必要对现有的大气湍流扩散理论作一简要的回顾。

1. 梯度理论

又称"K"理论，它是把湍流扩散过程与分子扩散进行类比，假定浓度通量正比于平均浓度梯度，即

$$\Phi_i=\overline{u'_i c'}=-K_i\frac{\partial\bar{c}}{\partial x_i}$$

其中 Φ_i 为浓度通量，$\bar{c}$ 为平均浓度，K_i 称为湍流扩散系数。依据质量守恒的原理可推得下述扩散方程：

$$\frac{d\bar{c}}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}\right)\tag{1}$$

随后，Lettau 和 Яглоц[1]等人分别假定：

$$\Phi_i=-\sum_{j=1}^{3}K_{ij}\frac{\partial\bar{c}}{\partial x_j}$$

从而得到扩散方程更普遍的形式：

$$\frac{d\bar{c}}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial\bar{c}}{\partial x_j}\right)\tag{2}$$

梯度理论的兴趣主要集中在：(1)，寻求不同大气条件下"K"的表达式；(2)，在不同的边界条件下方程的解。显然，大气边界层中"K"至少是 x_3的函数，上述方程是一个难以定解的非线性偏微分方程。Roberts[2] 和 Smith[3]只在忽略了横向风，并假设纵向风速是高

* 本文于1979年9月17日收到，1981年11月18日收到最后一次修改稿。

度 x_3 的幂函数的条件下得到它的特种解。

2. 统计理论和经验正态分布模式

1921 年 Taylor, G. I. 在湍流场均匀、平稳的条件下，假定被扩散的质点随流体质点一起运动，对瞬时点源的扩散导出了浓度分布的方差：

$$\sigma_{y,z}^2 = 2\sigma_{v,w}^2 \int_0^T \int_0^t R_L(\xi) d\xi dt \tag{3}$$

其中 $R_L(\xi)$是单个流体质点在流场中运动的拉格朗日相关系数。因此，从理论上或实验中给出它的具体形式是问题的关键。迄今为止，这仍然是一个十分困难的问题[4]。

Sutton[2]用量纲分析的方法给出了“$R_L(\xi)$”的一种解析表达式：

$$R_L(\xi) = \left(\frac{N+\nu}{N+\nu+\overline{\sigma^2\xi}}\right)^n \tag{4}$$

其中 ν 为分子动粘系数；$N=u_*z$ 为湍流粘性系数；$n=2m/1+m$，m 是平均风速垂直分布的幂次。

Hay 和 Pasquill[5]注意到拉氏相关 $R_E(t)$与 $R_L(\xi)$具有相同的端点性质和相近的曲线形状，假定：

$$R_L(\xi)=R_E(t),\ \xi=\beta t,\ \beta\geqslant 0 \tag{5}$$

避开了在湍流场中直接测定“$R_L(\xi)$”的困难，而易于通过定点的湍流观测得到浓度分布的方差。但是，这种作法还没能得到满意的理论解释。

在实际工作中，大都根据经验用正态模式来表示连续点源扩散的浓度分布，其表达式为：

$$c(x,y,z)=\frac{Q}{2\pi U\sigma_y\sigma_z}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma_y{}^2}+\frac{z^2}{\sigma_z{}^2}\right]\right\} \tag{6}$$

其中 Q 为源强，U 为平均风速，σ_y 和 σ_z 分别为 y 和 z 方向上浓度分布的标准差。因此，寻求各种气象条件下的“σ_y”和“σ_z”值是问题的关键，Gifford 等人[6]曾进行了大量的工作。

从机理上说，经验正态分布只适用于均匀、平稳的大气流场。Smith[3]的解表明，只要考虑大气流动在垂直方向的风速剪切，排放物在空间的浓度分布就是非正态的。在中距离的扩散问题上，考虑到风向剪切之后，问题可能更加复杂(Csanady[7])。

3. 相似理论

相似理论认为，在近地层地面源扩散的统计特征量只决定于摩擦速度“u_*”，扩散时间“t”以及特征尺度。利用量纲分析的方法可给出浓度分布的表达式。Монин[8]，Batchelor 和 Ellison 等人在这方面作了大量的工作。

Pasquill[9]指出，烟云分布的特征尺度$\langle z\rangle$，除了决定于 σ_w 和 u_* 外，还决定于湍涡的特征尺度，即微分尺度“λ_m”或积分尺度“L_E”。即

$$\frac{d\langle Z\rangle}{dt}=\sigma_w F\left(\frac{L_E}{\langle Z\rangle}\right) \quad \text{或} \quad \frac{d\langle Z\rangle}{dt}=\sigma_w f\left(\frac{\lambda_m}{\langle Z\rangle}\right)$$

此外，如何选取适当的$\langle Z\rangle$值也是重要的。Pasquill[10]建议选取烟云顶高 Z_{max} 来代替烟云重心的高度。

陈家宜[11]对 Pasquill 的工作作了具体推导，得到不同层结下⟨Z⟩与 x 的关系，并经验地把它推广到 Ekmān 层中。

实践表明，对于近地面层中地面源的小尺度扩散问题，相似理论的成果是比较适用的。

4. 随机过程理论

这是近代提出的一种湍流扩散理论，1956 年 Bartlett[12]首先提出用无后效的马尔可夫过程来描述湍流扩散，1969 年Яглом[1]把它和 K 理论结合起来研究了均匀湍流场中连续点源在平均风剪切情况下的扩散问题，1974 年岳曾元等[13]用马尔可夫过程描述了大雷诺数下的湍流扩散。

这方面的工作在理论处理上有优越之处，本文的工作同样证实了这点。

二、大气湍流扩散过程的物理分析与数学描述

若在大气边界层中观测空气的运动，可以将速度场表达为：

$$\vec{V}(t,\vec{x}(t,\omega))=\vec{A}(t,\vec{x}(t,\omega))+\vec{V}'(t,\vec{x}(t,\omega))$$
$$=\begin{pmatrix}\vec{A}_1,(t,\vec{x}(t,\omega))\\ \vec{A}_2(t,\vec{x}(t,\omega))\\ \vec{A}_3(t,\vec{x}(t,\omega))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1'(t,\vec{x}(t,\omega))\\ v_2'(t,\vec{x}(t,\omega))\\ v_3'(t,\vec{x}(t,\omega))\end{pmatrix}$$

其中 $\vec{x}$ 为物理空间直角坐标系上的点，t 为时间，ω 为样本空间 Ω 中的抽象点，$\vec{A}(t,\vec{x}(t,\omega))$为 t 时刻处于 $\vec{x}$ 点上空气的平均运动速度，$\vec{V}'(t,\vec{x}(t,\omega))$为脉动速度。则

$$E\vec{V}(t,\vec{x}(t,\omega))=\vec{A}(t,\vec{x}(t,\omega))$$
$$E\vec{V}'(t,\vec{x}(t,\omega))=0$$

如果将扩散质点在空间的轨道记为：

$$\vec{x}(t,\omega)=\begin{pmatrix}x_1(t,\omega)\\ x_2(t,\omega)\\ x_3(t,\omega)\end{pmatrix}$$

则它显然是一个随机过程。问题是如何确定无数这样的轨道在空间的分布。

作者认为，可以把大气边界层中扩散质点（标记流体质点）的运动，分解为由平均风 $\vec{A}(t,\vec{x})$所作的搬运和由脉动风 $\vec{V}'(t,\vec{x}(\omega,t))$所作的扩散两部分。后者则是大气中大量不同尺度和强度的湍涡对标记流体质点所作的拉扯和携带的统计效应。这种效应可用标记质点在不同方向的标准差来考察。作者假定湍流扩散过程可看作分子扩散在尺度上的放大和变形。因此，我们建议用随机微分方程，即 Itô·K 随机微分方程来描述：

$$d\vec{x}(t,\omega)=\vec{A}(t,\vec{x}(t,\omega))+G(t,\vec{x}(t,\omega))d\vec{W}(t,\omega) \tag{7}$$

其中 $d\vec{W}(t,\omega)$是 t 时刻后，由三维布朗运动引起的位移，它具有性质。

$$E\{d\vec{W}(t,\omega)\cdot d\vec{W}(t,\omega)'\}=Q\cdot dt$$

其中 $d\vec{W}(t,\omega)'$是 $d\vec{W}(t,\omega)$的转置，E 是取数学期望，Q 是一个 3×3 的常数矩阵；$G(t,\vec{x}(t,\omega))d\vec{W}(t,\omega)$为 t 时刻标记流体质点在 $\vec{x}$ 位置上，由该处湍流扩散所引起的位移，而 $G(t,\vec{x}(t,\omega))$则是湍流位移与布朗运动引起的位移之间的一个尺度变换矩阵。

$\vec{x}(t,\omega)$满足(7)式的含义就是满足 Itô·K 随机积分方程。

$$\vec{x}(t,\omega)-\vec{x}(t_0,\omega)=\int_{t_0}^{t}\vec{A}(\tau,\vec{x}(\tau,\omega))d\tau+\int_{t_0}^{t}G(\tau,\vec{x}(\tau,\omega))d\vec{W}(\tau,\omega) \tag{8}$$

其中第一个积分为均方意义下的 Riemann 积分，第二个则是 Itô·K 意义下的随机积分。

数学上已经证明[14]，只须对 $\vec{A}(t,\vec{x}(t,\omega))$ 以及 $G(t,\vec{x}(t,\omega))$ 的性质作一些在实际问题中一般总能满足的限定， 如在某种意义下的有界性，连续性， Lipschitz 条件以及 $\vec{x}(t_0,\omega)$与 $d\vec{w}(t,\omega)$独立等等,则方程(7)或(8)的解过程就是马尔可夫过程。它的转移概率密度函数 $f(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)$满足 Колмогоров 向前方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(\vec{x},t)\cdot f(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}[D_{ij}(\vec{x},t)\cdot f(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)]=0$$

可以简记为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i f)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}[D_{ij}\cdot f]=0 \tag{9}$$

其中 $D_{ij}(\vec{x},t)$是矩阵 $D(\vec{x},t)=G(\vec{x},t)\cdot Q\cdot G(\vec{x},t)'$的第 i 行第 j 列的元素,$D(\vec{x},t)$称作扩散参数矩阵。

由于 $G(\vec{x},t)$和 Q 皆非退化,则 $D(\vec{x},t)$为正定,故方程(9)为抛物型方程。

三、大气边界层中连续点源扩散的浓度分布表达式及其一级近似表达式

首先假定大气边界层中的气流及湍流的统计特性是平稳的，并且只与垂直高度 x_3 有关。即

$$\vec{A}(t,\vec{x}(t,\omega))=\vec{A}(x_3)=\begin{pmatrix}A_1(x_3)\\A_2(x_3)\\A_3(x_3)\end{pmatrix}$$

$$G(t,\vec{x}(t,\omega))=G(x_3)$$

$$Q=\text{const.}$$

因此：

$$D(t,\bar{x}(\omega,t))=D(x_3)=\begin{pmatrix}D_{11}(x_3)&D_{12}(x_3)&D_{13}(x_3)\\D_{21}(x_3)&D_{22}(x_3)&D_{23}(x_3)\\D_{31}(x_3)&D_{32}(x_3)&D_{33}(x_3)\end{pmatrix}$$

则 Колмогоров 向前方程就化为

$$\frac{\partial}{\partial t}f+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x_3)\cdot f)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(D_{ij}(x_3)\cdot f)=0 \tag{10}$$

为今后书写方便,这里引进算符

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x_3))\cdot\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(D_{ij}(x_3))\cdot$$

则方程(10)可缩写为

$$Lf(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=0 \tag{11}$$

如前所述，由于 $D(x_3)$正定，方程(11)亦为抛物型方程[14]故其基本解为

$$f(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=Z(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)+\epsilon(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau) \tag{12}$$

其中

$$Z(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}|D(\xi_3)|^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\xi})'D(\xi_3)^{-1}(\vec{x}-\vec{\xi})\cdot\frac{1}{t-\tau}\right\}$$

$$\epsilon(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=\int_\tau^t\int_{R_3}Z(\vec{x},t|\vec{\eta},\varphi)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(LZ)_n(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)\right\}d\vec{\eta}\,d\varphi$$

$$(LZ)_1(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)=LZ(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)$$

$$(LZ)_{n+1}(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)=\int_\tau^t\int_{R_3}(LZ)(\vec{\eta},\varphi|\vec{\zeta},\Psi)\cdot(LZ)_n(\vec{\zeta},\Psi|\vec{\xi},\tau)\,d\vec{\zeta}\,d\Psi$$

因此，在大气边界层中空间某一点 $\vec{\xi}$ 上有一源强为 q 的连续点源，则利用(12)式的结果即可得到排放物在空间浓度分布的表达式：

$$C(x_1、x_2、x_3)=\lim_{t\to\infty}\int_\tau^t q\cdot f(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)d\tau$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_\tau^t q\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|D(\xi_3)|^{-\frac{1}{2}}\cdot(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\xi})'D(\xi_3)^{-1}(\vec{x}-\vec{\xi})\frac{1}{t-\tau}\right\}d\tau$$

$$+\lim_{t\to\infty}\int_\tau^t q\int_\tau^t\int_{R_3}Z(\vec{x},t|\vec{\eta},\varphi)\sum_{n=1}^{\infty}(LZ)_n(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)\,d\vec{\eta}\,d\varphi\,d\tau \tag{13}$$

上述的结果，当给定 $q,\vec{\xi}$ 及 $D(\xi_3)$时，(不失一般性可取 $\tau=0$)，虽然可以用来计算浓度分布，但由于形式上过于复杂所带来的计算上的困难，很难在实际工作中应用，因此必须去寻求比较实用的一级近似公式。

当然，可将(13)式右端的第一项直接作为一级近似解的表达式。但是，由于这一项完全不包含平均风的搬运作用。从实用角度上来看，未免过于粗糙。

我们采用将平均风作用和湍流作用先分离后叠加的方法来寻求浓度分布的一般表达式和一级近似解。

在不考虑平均风的搬运作用的情况下，Itô·K 随机微分方程简化为：

$$d\vec{x}(t,\omega)=G(t,\vec{x}(t,\omega))d\vec{W}(t,\omega)$$

相应将 Колмогоров 向前方程简化为

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(D_{ij}(x_3)\cdot f_1)=0$$

其中 $f_1=f_1(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)$，类似地也引进算符 L^*

$$L^*=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i\partial x_j}(D_{ij}(x_3)).$$

则向前方程简写为

$$L^*f_1(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=0 \tag{14}$$

此方程的基本解为

$$f_1(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=Z(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)+\varepsilon^*(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau) \tag{15}$$

其中

$$Z(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}|D(\xi_3)|^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\xi})'D(\vec{\xi}_3)^{-1}(\vec{x}-\vec{\xi})\frac{1}{t-\tau}\right\}$$

$$\varepsilon^*(\vec{x},t|\vec{\xi},\tau)=\int_\tau^t\int_{R_3}Z(\vec{x},t|\vec{\eta},\varphi)\left[\sum_{n=1}^{\infty}(L^*Z)_n(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)\right]d\vec{\eta}d\varphi$$

$$(L^*Z)1(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)=L^*Z(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)$$

$$(L^*Z)_{n+1}(\vec{\eta},\varphi|\vec{\xi},\tau)=\int_\tau^t\int_{R_3}(L^*Z)(\vec{\eta},\varphi|\vec{\zeta},\psi)\cdot(LZ)_n(\vec{\zeta},\psi|\vec{\xi},\tau)d\zeta d\psi$$

由于平均风对质点的搬运作用是确定的，非随机的，在物理上与湍流扩散作用相互独立。因此平均风的作用不会改变湍流作用下质点的转移概率密度函数的形式，而把$(t-\tau)$时间后转移的终点坐标由 $\vec{x}$ 位移至 $\vec{x}-\vec{A}(x_3)(t-\tau)$，即

$$f_1[(\vec{x}-\vec{A}(x_3)(t-\tau)),t|\vec{\xi},\tau]$$

因此，位于 $\vec{\xi}$，源强为 q 的连续点源，其排放物在空间的浓度分布应为

$$\begin{aligned}c(x_1、x_2、x_3)&=\lim_{t\to\infty}\int_\tau^t qf_1[(\vec{x}-\vec{A}(x_3)(t-\tau)),t|\vec{\xi},\tau]d\tau\\&=\lim_{t\to\infty}\int_\tau^t qZ[(\vec{x}-\vec{A}(x_3)(t-\tau)),t|\vec{\xi},\tau]d\tau\\&\quad+\lim_{t\to\infty}\int_\tau^t q\varepsilon^*[(\vec{x}-\vec{A}(x_3)(t-\tau)),t|\vec{\xi},\tau]d\tau\end{aligned} \tag{16}$$

取上式右端第一项为浓度分布的一级近似表达式，并取 $\tau=0$，则得

$$\begin{aligned}c^{(1)}(x_1、x_2、x_3)&=\lim_{\substack{\tau=0\\t\to\infty}}\int_\tau^t qZ[(\vec{x}-\vec{A}(x_3)(t-\tau)),t|\vec{\xi},\tau]d\tau.\\&=\frac{q}{2\pi}|D(\xi_3)|^{-\frac{1}{2}}[(\vec{x}-\vec{\xi})'D(\xi_3)^{-1}(\vec{x}-\vec{\xi})]^{-\frac{1}{2}}\\&\quad\cdot\exp\left\{(\vec{x}-\vec{\xi})'D(\xi_3)^{-1}\begin{pmatrix}A_1(x_3)\\A_2(x_3)\\A_3(x_3)\end{pmatrix}\right\}.\\&\quad\cdot\exp\left\{-[(\vec{x}-\vec{\xi})'D(\xi_3)^{-1}(\vec{x}-\vec{\xi})]^{\frac{1}{2}}\cdot\right.\\&\quad\left.\cdot\left[(A_1(x_3),A_2(x_3),A_3(x_3))\cdot D(\xi_3)^{-1}\begin{pmatrix}A_1(x_3)\\A_2(x_3)\\A_3(x_3)\end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\end{aligned} \tag{17}$$

(17)式只是一些初等函数的组合，因此实际应用时计算并不复杂。公式中包含了平均风矢量 $\vec{A}(x_3)$的三个分量，因此若把边界层中风速的两个分量 u,v 代入，并考虑到标记流体质点的沉降速度代入 $A_3(x_3)$，就能予计风向、风速剪切和重力沉降作用下的连续

点源扩散的空间浓度分布。下文将给出这些表达式。

(17)式只是一级近似表达形式，用它计算浓度分布的精度较低。主要表现在公式中的扩散系数是以 $D(\xi_3)$ 的形式，而不是以 $D(x_3)$ 的形式出现。即假定不论烟云扩散至何处，将保持原排放高度的扩散能力，这将限制了计算的精度。但是，我们可以借助二级或更高级的表达式来处理问题，除了计算工作量大之外，没有其它的困难。

四、浓度计算公式的一些特例

为了便于与污染气象学中常用的经验公式进行比较，下面将考察(17)式的一些特例。首先设 $i \neq j$ 时，$D_{ij}(\xi_3)=0$，即

$$D(\xi_3)=\begin{pmatrix} D_{11}(\xi_3) & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}(\xi_3) & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}(\xi_3) \end{pmatrix}$$

以及

$$A_1(x_3)=U;\quad A_2(x_3)=A_3(x_3)=0$$

则(17)式简化为

$$c^{(1)}(x_1、x_2、x_3)=\frac{q}{2\pi}[D_{11}(\xi_3)\cdot D_{22}(\xi_3)\cdot D_{33}(\xi_3)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left[\frac{(x_1-\xi_1)^2}{D_{11}(\xi_3)}+\frac{(x_2-\xi_2)^2}{D_{22}(\xi_3)}+\frac{(x_3-\xi_3)^2}{D_{33}(\xi_3)}\right]$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{U}{\sqrt{D_{11}(\xi_3)}}\left[\left(\frac{(x_1-\xi_1)^2}{D_{11}(\xi_3)}+\frac{(x_2-\xi_2)^2}{D_{22}(\xi_3)}+\frac{(x_3-\xi_3)^2}{D_{33}(\xi_3)}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{(x_1-\xi_1)^2}{D_{11}(\xi_3)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

进一步假设

$$\frac{(x_1-\xi_1)^2}{D_{11}(\xi_3)}\gg\frac{(x_2-\xi_2)^2}{D_{22}(\xi_3)},\quad\frac{(x_3-\xi_3)^2}{D_{33}(\xi_3)}$$

并取排放点为坐标原点，即 $\vec{\xi}=0$，上式进一步简化为

$$c^{(1)}(x_1、x_2、x_3)=\frac{q}{2\pi\sqrt{D_{22}(0)D_{33}(0)x_1}}\exp\left\{-\frac{U}{2x_1}\left[\frac{x_2^2}{D_{22}(0)}+\frac{x_3^2}{D_{33}(0)}\right]\right\}\tag{18}$$

将此式与统计理论的经验模式(公式 6)比较，不难看出二者具有相同的数学形式，上式中的 D_{22} 和 D_{33} 分别与 (6) 式中的 $\sigma_y^2\Big/\frac{x_1}{U}$ 和 $\sigma_z^2\Big/\frac{x_1}{U}$ 相当。可以认为，(6)式是本文理论结果的一种近似与简化。

进一步化简到最简单的情况，即

$$D(\xi_3)=\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}=\text{常数矩阵}$$

(17)式就简化为

$$c^{(1)}(x_1、x_2、x_3)=\frac{q}{2\pi Dr}e^{-\frac{U}{D}(r-x_1)} \tag{19}$$

其中　$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

显然这与连续点源斐克扩散的解在形式上也是一致的。

考虑到大气边界层中风向和风速的切变，可设

$$\begin{pmatrix}A_1(x_3)\\A_2(x_3)\\A_3(x_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U(x_3)\\V(x_3)\\0\end{pmatrix}$$

同时满足条件

$$\frac{(x_1-\xi_1)^2}{D_{11}}\gg\frac{(x_2-\xi_2)^2}{D_{22}},\ \frac{(x_3-\xi_3)^2}{D_{33}}$$

并取 $\vec{\xi}=0$，则由(17)式可得

$$c^{(1)}(x_1、x_2、x_3)=\frac{q}{2\pi\sqrt{D_{22}D_{33}}\,x_1}\exp\left\{-\frac{U}{2x_1}\left[\frac{(x_2-S_{12}(x_3)x_1)^2}{D_{22}}-\frac{x_3^2}{D_{33}}\right]\right\} \tag{20}$$

其中 $S_{12}(x_3)=V(x_3)/U(x_3)$，表示横向风速与纵向风速的比值，称作水平偏向因子。

假设烟云排放高度 $x_3=0$ 处 $V=0$，随 x_3 的变化烟云在各高度上的中心轴线将在水平面上旋转了一个角度 θ，$\theta=\mathrm{tg}^{-1}[S_{12}(x_3)]$。若将大气边界层内风的分布公式具体代入，(20)式就是考虑了柯氏力和热成风影响的计算公式。

同理，还可以考虑烟云粒子的沉降运动，将 $A_1(x_3)=U(x_3)$，$A_2(x_3)=V(x_3)$ 以及 $A_3(x_3)=W(x_3)$ 代入(20)式，在相同的假定下可得

$$c^{(1)}(x_1、x_2、x_3)=\frac{q}{2\pi\sqrt{D_{22}D_{33}}\,x_1}\exp\left\{-\frac{U}{2x_1}\left[\frac{(x_2-S_{12}(x_3)x_1)^2}{D_{22}}+\frac{(x_3-S_{13}(x_3)x_1)^2}{D_{33}}\right]\right\} \tag{21}$$

其中 $S_{13}(x_3)=\dfrac{W(x_3)}{U(x_3)}$，为垂直速度与纵向水平风速之比，称作垂直偏向因子。

五、讨　　论

用 Itô·K 随机微分方程研究和处理湍流扩散问题是作者的一次尝试性的理论探索，目的在于寻求一种解决湍流扩散问题的新途径。研究的初步结果证明，它可以避免梯度理论求解非线性偏微分方程的困难，同时它的一些特例又与统计理论中常用的经验公式在形式上一致。这些都说明这是一条值得注意的途径。

本文结果表明，大气边界层中风场的垂直结构可以合理地吸收在平均风场 $\vec{A}(x_3)$ 中加以处理，得到比较简洁的结果。

如何确定扩散参数矩阵的表达形式是一个有待解决的问题。它与湍流交换系数具有相同的量纲，由(18)式及(6)式比较看出，D_{22} 和 D_{33} 具有下述形式：

$$D_{22}=\sigma_y^2\Big/\frac{x_1}{U};\quad D_{33}=\sigma_z^2\Big/\frac{x_1}{U}$$

与湍流交换系数 $K_{ii}=\frac{1}{2}\,\frac{d\sigma^2_{ii}}{dt}$ 有着相近的表达形式。

污染物的扩散与大气湍流的尺度密切相关，而大气湍流又是由尺度谱很宽的涡旋所组成。就连续点源而言，当烟羽尺度较小时，大气中各种尺度的湍涡对烟羽扩散均能发生作用；当烟羽的尺度增大后，小尺度的湍涡对烟羽的影响逐渐减弱，扩散速率趋于缓慢。由(3)式预测的扩散方差，在时间很小时与时间成正比；而在时间很长后与时间的平方根成正比。因而将维纳过程变换为湍流过程不是一个单纯的倍数增加，即在整个过程中 $G(t,\vec{x}(\omega,t))$ 不应取为常量。维纳过程应满足下述条件[15]

1，$E\{x_i(t)-x_i(t')\}=0$

2，$E\{[x_i(t)-x_i(t')]^2\}=2\,D\,|t-t'|$

3，如果 $0\leqslant t_1<t_2\cdots<t_n$，则 $x_i(t)$ 的增量 $\Delta x_i(t_1、t_2)$，$\Delta x_i(t_2、t_3)$，$\cdots$，$\Delta x_i(t_{n-1}、t_n)$ 是相互独立的随机变量，即平稳独立增量过程。

大气湍流扩散过程的后期是满足上述条件的，因而，可以看作是维纳过程的放大。

如果把整个大气湍流扩散过程看作是维纳过程的变换，必须进一步假定在扩散的各个时刻都能确定一个特征尺度，它对扩散的贡献等效于各种尺度湍涡对扩散贡献的总和。

另一方面，大气扩散能力在三个方向是不同的。根据 Яглом 的看法，还应考虑各个方向之间对扩散的相互影响。作者认为，尺度变换矩阵与雷诺应力矩阵有明确的物理联系。即

$$G(t,x_3)\propto\begin{pmatrix}\overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'}\\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'}\\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2}\end{pmatrix}$$

上述两点，值得我们进一步进行理论研究和实验验证。

参 考 文 献

[1] Monin, A. S. and A. M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics, Mechanics of Turbulence, V. 1, Chap. 5, The MIT Press, 1971.

[2] Sutton, O. G., Micrometeorology, McGraw-Hill Book Co., 1953.

[3] Smith, F. B., The Diffusion of Smoke from a Continuous Elevated Point-Source into a Turbulent Atmosphere, *J. of Fluid Mech.*, 2, 49, 1957.

[4] Pasquill, F., Lectures on Air Pollution and Environmental Impact Analyses, p.1, Workshop Coordianator: Duane A. Haugen, Amer. Meteor. Soc., 1975.

[5] Hay, J. S. and F. Pasquill, Adv. in Geophys., V. 6, Academic Press, p. 345, 1959.

[6] Gifford, F. A., Turbulent Diffusion Typing Schemes: A Review, *Nuclear Safety*, **17**, 68, 1976.

[7] Csanady, G. T., Diffusion in an Ekman Layer, *J. of Atmos. Sci.*, **26**, 414, 1969.

[8] Monin, A. S., Adv. in Geophys., V. 6, Academic Press, p. 331, 1959.

[9] Pasquill, F., Adv. in Geophys. V. 18 B, Academic Press, p. 1, 1974.

[10] Pasquill, F., Lagrangiian Similarity and Vertical Diffusion from a Source at Ground Level, *Q. J. of Roy. Meteor. Soc.*, **92**, 185, 1966.

[11] 陈家宜，尚未发表。

[12] Bartlett, M. S., An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge Univ. Press, p. 312, 1956.
[13] 岳曾元等，大雷诺数平稳湍流的马尔科夫过程描述，中国科学，p. 148，1974.
[14] Friedman, A., Partial Differential Equation of Parobalic Type, Prentice Hall Press, p. 347, 1964.
[15] 张炳根等，科学与工程中的随机微分方程，海洋出版社，p. 61，1980.

PROCESSING THE TURBULENT DIFFUSION PROBLEM IN THE ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER BY USING OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

Ye Wenhu, Lu Chongfei, Zhang Aichen

(Peking University)

Abstract

On the basis of physical mechanics of the turbulent diffusion, the turbulent diffusion process has been described with Ito's stochastic differential equation, and the concentration model of the continous point source has been obtained. Its first order approximate solution has been expressed as a form of analytical function. The special cases of the first order approximate solution has been identified with the form which has been commonly used.

The solution includes the factors of geostrophic wind, gravity deposit and etc., which influence the diffusion process certainly.