

## 有速度切变时, Lorenz 系统中浑沌的特点\*

王 燕 刘式达

(北京大学地球物理系)

### 提 要

Lorenz 方程中引进切变以后,对普朗特数为 0.7 的大气可以出现浑沌。

速度切变在一定情况下起阻尼作用,有切变时比无切变时湍流发生的临界莱雷数要高。

浑沌是一种非周期的现象,它在相空间中的轨迹是混乱的。

通向湍流的道路有很多种。切变较小时为普通湍流形态;切变较大时是间歇湍流形态;切变适中时为短暂层流状态。

有速度切变时的浑沌对大气湍流的研究有很大的实际意义。

### 一、引 言

E. N. Lorenz 1963 年<sup>[1]</sup>从确定的微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

中算出了非周期流。其中  $\sigma$  是 Prandtl 数,它代表分子粘性系数  $\nu$  和热传导系数  $k$  之比

$$\sigma = \frac{\nu}{k} \quad (2)$$

$r$  是 Rayleigh 数,它和  $N^2$  成正比,但符号相反。 $N$  是 Brunt-Väisälä 频率。故  $r > 0$  ( $N^2 < 0$ ) 相当于不稳定层结。

二十年代特别是近几年来关于非周期流或浑沌 (chaos) 的研究飞快发展<sup>[2]</sup>。

Lorenz 方程 (1) 中当  $\sigma = 1$  时不出现浑沌,只有当  $\sigma$  远大于 1 时 (Lorenz 在文章中取  $\sigma = 10$ ) 才出现浑沌<sup>[1]</sup>。而大气的  $\sigma$  约为 0.7,因此 Lorenz 的结果不能解释大气中对流向湍流的转换。我们认为浑沌或湍流的出现是耗散系统中湍流的驱动因素和耗散因素相匹配的结果。 $\sigma = 1$  或  $\sigma = 0.7$  所以不能出现浑沌是耗散因素太小,不能将对流破碎成一小块一小块的湍涡。根据我们的定性分析<sup>[3]</sup>,速度垂直切变  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  在一定条件下可以

\*本文于 1984 年 11 月 13 日收到,1985 年 6 月 15 日收到修改稿。

是耗散因素, 因此我们在方程 (1) 中加进切变因素  $S$  以后, 在  $\sigma=1$  或  $\sigma=0.7$  的情况下已经算出了浑沌<sup>[4]</sup>。

本文计算了不同层结因素  $r$  和不同切变因素  $S$  下浑沌的特点。

## 二、基本方程和出现浑沌的条件

对二维  $(x, z)$  Boussinesq 近似, 并在运动方程中引进和切变  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  成比例的阻尼项后, 流体运动方程组是<sup>[1,4]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) &= -g \frac{\partial \pi}{\partial x} + \nu \Delta^2 \psi - l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Delta^2 \psi \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} + J(\psi, \pi) &= \frac{N^2}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k \Delta \pi \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\psi$  是流函数,  $\pi = \frac{p}{\rho}$  是无因次密度,  $l$  是“混合长”,  $J$  是 Jacobi 算子。

利用截谱方法<sup>[1]</sup>, (3) 式化为常微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{X} = -(\sigma + s)X + \sigma Y \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (4)$$

其中  $X, Y, Z$  分别代表运动强度、层结强度和非线性强度,  $S$  是无因次切变因素, 它和  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  成比例,  $b$  是常参数。若取  $S=0$ , 方程 (4) 就化为 Lorenz 方程 (1)。

方程 (4) 有三个平衡态

$$O_1(X, Y, Z) = (0, 0, 0) \quad (5)$$

$$C_1, C_2(X, Y, Z) = \left( \pm \sqrt{\frac{b[\sigma(r-1)-S]}{\sigma+S}}, \pm \sqrt{\frac{b(\sigma+S)[\sigma(r-1)-S]}{\sigma^2}}, \frac{\sigma(r-1)-S}{\sigma} \right) \quad (6)$$

平衡态  $O$  相当于静止状态, 平衡态  $c_1$  或  $c_2$  相当于对流状态。

我们分析<sup>[4]</sup>对流状态失稳而发生 Hopf 分岔的临界 Rayleigh 数是

$$r_0 = \frac{(\sigma+S)^2(\sigma+b+3+S)}{\sigma(\sigma+S-b-1)} \quad (7)$$

当  $S=0$  时, (7) 式就是 Lorenz 的结果。因为  $r$  是正的 (不稳定层结), 按 Lorenz 要求出现浑沌必须

$$\sigma > b+1 \quad (8)$$

而我们 ( $S \neq 0$ ) 只要求

$$\sigma + S > b+1 \quad (9)$$

因此  $\sigma=1$  或  $\sigma=0.7$  就可能使 (9) 式成立。

图 1 是取  $\sigma=0.7, b=8/3$  时在  $(s, r)$  坐标平面上按 (7) 式画出的临界  $r$  值曲线, 该曲线的上部是发生浑沌的参考区域。曲线极值点的位置约为

$$S=5.4, r=259 \quad (10)$$

从图 1 看出, Rayleigh 数  $r$  必须大于 259 时才可能出现浑沌。而同样的  $b$  值时, 若  $S=0$  则只要  $r$  大于 24.74 就出现浑沌<sup>[1]</sup>。这说明在我们的模型里, 切变的因素是压制对流的, 有切变时比无切变时出现浑沌要求更高的 Rayleigh 数。这和 Joachim<sup>[5]</sup> 分析的结论一致。

从图 1 还看出, 切变  $S$  愈大, 所要求的临界 Rayleigh 数愈高。极值点左边的一段曲线不符合以上分析的物理过程和事实, 我们不考虑它。下面主要分析  $S > 5.4$  的情况。

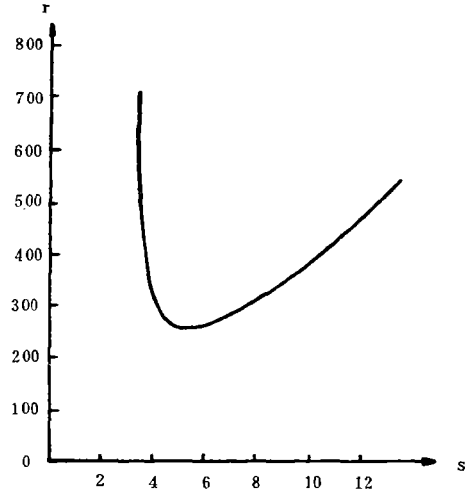


图 1 出现浑沌的临界曲线

### 三、浑沌的状态特征

我们取如下参数

$$\sigma=0.7, b=8/3, S=10, r=500 \quad (11)$$

取初值  $X_0=10, Y_0=100, Z_0=400$ , 步长取 0.1 用 Runge-Kutta 法对 (4) 式进行了数值计算。

在参数值 (11) 条件下, (4) 的三个平衡态为

$$O_1(0, 0, 0)$$

$$C_1, C_2: (\pm 9.2, \pm 140.6, 484.7) \quad (12)$$

图 2 是相空间的一部分轨迹在  $(Y, Z)$  平面上的投影。图中箭头的方向代表时间增加的方向。

从图中看出轨迹先向  $c_1$  运动并绕  $c_1$  转六圈, 之后又转向  $c_2$  绕两圈。之后是  $c_1$  一圈,  $c_2$  两圈,  $c_1$  三圈,  $c_2$  两圈……这种绕法是无规则的, 无周期的, 是类似于湍流的浑沌现象。为了使图清楚, 图 2 中只列出轨迹的一段。整个轨迹的图象叫奇怪吸引子 (Strange attractor)<sup>[6]</sup>。也可以用 Poin Care/ 截面法<sup>[7]</sup> 将三维空间的轨迹化为一维映射。在图 2 中连续取  $Z$  的极大值记录  $Z_1, Z_2, \dots$ , 并绘制  $Z_{n+1}$  对  $Z_n (n=1, 2, \dots)$  的图就导得一维单峰映射, 如图 3 所示。

现在已经证明像图 3 那样的单峰映射都具有普遍的浑沌特性<sup>[8]</sup>, 并称 Lorenz 方程 (1) 算得的浑沌为 Lorenz 吸引子。所以我们算出的结果具有浑沌特征是确信无疑的。

### 四、各种浑沌形态

我们在图 1 的临界曲线上部对不同的  $S$  和  $r$  值, 算出了几十条浑沌轨道, 从它们随时间的演变情况, 我们将其归纳为三类: 普通湍流, 间歇湍流, 介于前二者之间的短暂的层流。

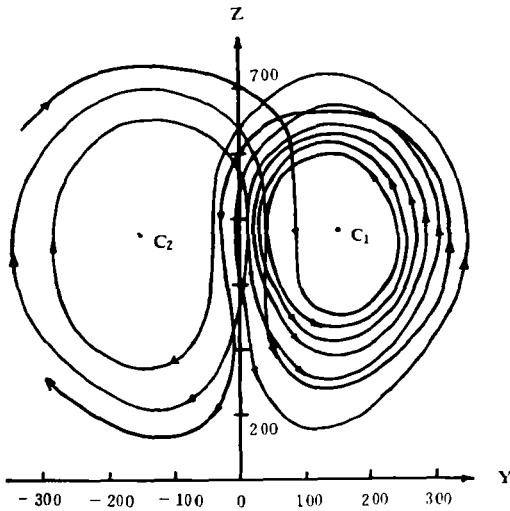


图 2 轨线在 (Y, Z) 平面上的投影

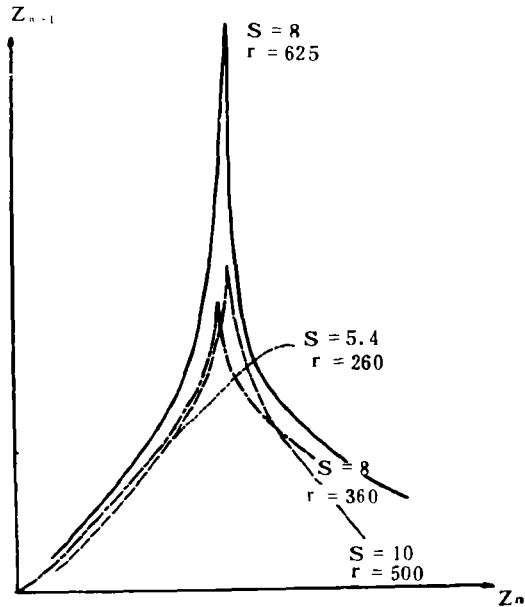


图 3 Lorenz 吸引子的单峰映射

由于在临界曲线上发生 Hopf 分岔<sup>[6]</sup>,那么临界曲线的上部,方程(4)右端线性化矩阵<sup>[1]</sup>的特征值  $\lambda = \beta_1 + i\beta_2$  的实部  $\beta_1 > 0$ 。下表中列出  $S = 6, 7, 8, 9, 10$  等情况下,不同  $r$  值时  $\beta_1$  的数值。此时解的形态由

$$e^{\beta_1 t} \cos \beta_2 t$$

决定。

表 混沌区特征值实部  $\beta_1$  的数值

$S \backslash r$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
6	0.08	0.17	0.24	0.31	0.36	0.42	0.46	0.50	0.54
7	0.10	0.20	0.28	0.36	0.43	0.49	0.55	0.60	0.65
8		0.13	0.20	0.30	0.38	0.45	0.52	0.58	0.63
9		0.03	0.13	0.22	0.31	0.38	0.45	0.52	0.56
10				0.16	0.25	0.33	0.41	0.48	0.55

普通湍流状态常出现在切变  $S$  较小,  $\beta_1$  值较大处(由表看出对同一  $r$  值,  $\beta_1$  随  $S$  增加而减小),因为  $\beta_1$  较大,所以轨迹离开  $c_1$  或  $c_2$  也愈快,混沌轨道绕  $c_1$  或  $c_2$  的圈数不多。图 4 是  $S = 6, r = 500$  时  $X$  随时间  $t$  的变化。这属于普通湍流形态。

间歇湍流常出现在  $S$  较大而  $\beta_1$  较小的地方。因为  $\beta_1$  较小,轨迹绕  $c_1$  或  $c_2$  的时间较长,甚至很长时间几乎接近  $c_1$  或  $c_2$  点而形成层流状态,之后又转向湍流。这样层流和湍流交替出现。图 5 是  $S = 13.5, r = 650$  时的  $X$  值随  $t$  的变化图。

从图中看出,混沌之后经过 863 步的层流(接近  $c_1$ )又转向湍流,又经过 230 步的层流(接近  $c_1$  并稍稍振荡)又转向湍流,又经过 566 步的层流(接近  $c_2$ )...

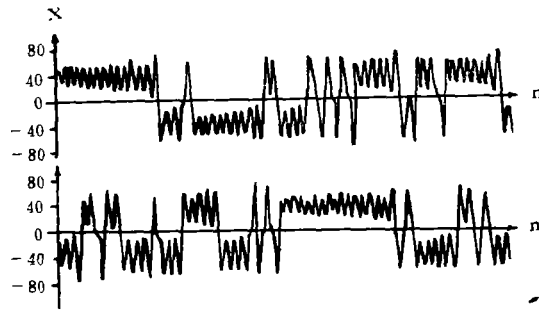


图 4  $S$ 较小时 ( $s=6, r=500$ ) 的普通湍流  
(下图头接上图尾,  $n$  表示时间)

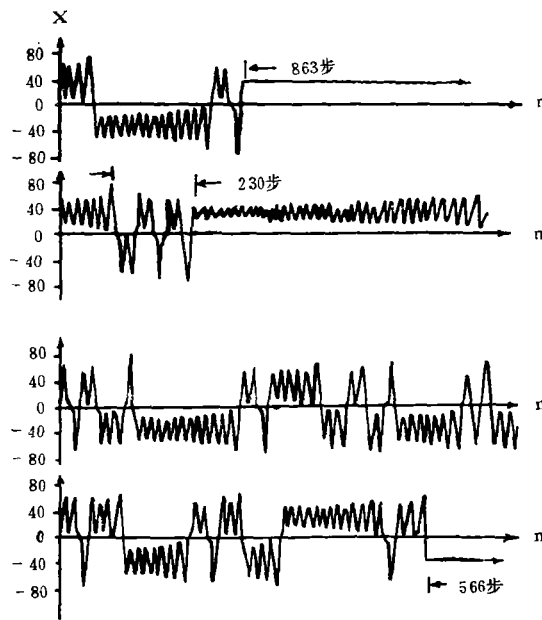


图 5  $S$ 较大时 ( $s=13.5, r=650$ ) 的间歇湍流形态  
(下图头接上图的尾)

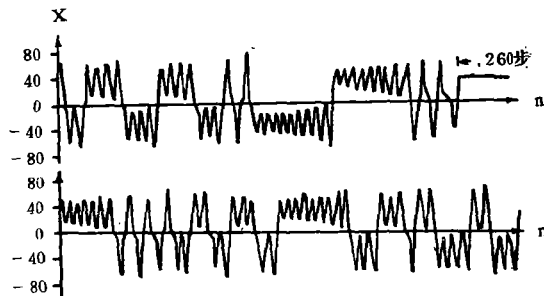


图 6  $S$ 中等时 ( $s=10, r=500$ ) 的短暂层流状态

介于普通湍流和间歇湍流之间的状态,  $S$  介于前两者之间。这种状态总的看像普通湍流, 但轨迹有时有一段接近层流, 但时间不长。图 6 是  $S=10, r=500$  时  $X$  随  $t$  的变化图。图中的浑沌状态中间夹有 260 步的层流状态 (接近  $c_1$ )。我们称之为短暂层流状态。

现在已经知道通向湍流的道路有很多种<sup>[9]</sup>, 间歇湍流就是其中的一种。

带有切变时浑沌特征的研究, 对研究大气湍流和热对流<sup>[10]</sup>有很大意义。

### 参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130—141, 1963.
- [2] 郝柏林, 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它, 物理学进展, 3 期, 329—416, 1983.
- [3] 刘式达等, 关于一类层切变流的分类和非线性解, 力学学报, 16 卷, 2 期, 121—132, 1984.
- [4] 刘式达, 内波动力学中的浑沌和大气湍流的发生, 中国科学(B), 第五期, 542—550, 1986.
- [5] Joachim, P., Cloud bands in the earth's atmosphere, observations and theory, *Tellus*, 23, 404—425, 1971.
- [6] Guckenheimer, J., Nonlinear oscillation, dynamical system, and bifurcation of vector fields, Springer-Vorlag Press, 1983.
- [7] Lichtenberg, A. J., Regular and stochastic motion, Springer-Vorlag Press, 1983.
- [8] Collet, P., Iterated maps on the interval as dynamical systems, Birkhauser, 1980.
- [9] Eckmann, J. P., Road to turbulence in dissipative dynamical systems, *Rev. Mod. Phys.* 53, 643—654, 1981.
- [10] Shirer, H. N., and J. A. Dutton, The branching hierarchy of Multiple solution in a model of moist convection, *J. Atmos. Sci.*, 36, 1705—1718, 1979.

## CHARACTERIZATION OF CHAOS OF THE LORENZ SYSTEM WITH VELOCITY SHEAR

Wang Yan                  Liu Shida

(Department of Geophysics, Peking University)

### Abstract

The chaos motions may appear when the velocity shear damper is add into the Lorenz equation for the Prandtl number  $\sigma=0.7$ .

The critical Rayleigh number with velocity shear is larger than that without velocity shear.

The chaos is aperiodic phenomena. The trajectory of chaos motions is irregular in phase space.

Roads to turbulence have many different kinds. The behaviour is general turbulence when shear is small. The behaviour is intermittent turbulence when shear is large. The behaviour is transient laminar when shear is moderate.

The research of chaos motions with velocity shear is of significance for understanding atmospheric turbulence.