

Kalman 滤波技术在台风路径动力-统计预报中的应用*

金一鸣

周洪祥

(浙江省气象科学研究所)

(浙江省计算技术研究所)

提 要

本文从台风移动的动力学模式出发,讨论了目前台风路径动力-统计预报中所存在的问题,提出了改进的措施,探讨了 kalman 滤波器的实现方案,并分析了在采用 kalman 最佳线性递推滤波方法作实际预报时对误差计算的处理方法,从而对台风路径的动力-统计预报作了改进。通过较多独立样本的检验,表明了台风路径动力-统计预报的 kalman 滤波方法,能够修正台风路径预报的速度和方向,因此具有实际的应用价值。

一、引 言

台风是我国东部沿海地区夏季主要的灾害性天气之一。台风路径预报是台风预报的关键。近年来,国内外不少气象工作者已从各种不同的途径对台风路径的客观预报方法进行了探索^[1-4],动力学与统计学相结合在目前台风路径预报中被认为是比较有成效的一种客观预报方法,但是如何更加有效地将动力学方法和统计学方法结合起来,建立比较完善的动力统计学预报方案,仍然是目前值得研究的一个问题。

目前的动力统计学预报方法中^[2-4],还存在着一些带共同性的问题,一是台风起报点的初始场存在一定的误差^[5];二是对台风本身的历史路径考虑不够,因此对路径不稳定的台风,预报时容易造成比较大的偏差,为了弥补上述的不足,本文试图在台风路径的动力-统计预报中引入 Kalman 滤波方法^[6],从而对台风路径的动力-统计预报方案进行必要的改进。

二、台风移动的动力学模式

对台风的涡旋运动,可以写成如下的方程^[7]:

* 本文于1983年10月16日收到,1985年1月28日收到修改稿。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{du}{dt} = fv + G_1(t) \\ \frac{dv}{dt} = -fu + G_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中 u 和 v 为台风中心移动的纬向和经向的二个速度分量, f 为地转参数, $G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 为地转参数以外的各项合力, 这些力显然目前还难以确定, 是两个随机函数。

令:

$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = u, x_4 = v$, 则 (1) 式写成:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

所给于的定解条件是:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_{t=t_k} = \begin{pmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \\ u(t_k) \\ v(t_k) \end{pmatrix} \quad (3)$$

若我们令

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & -f & 0 \end{pmatrix}, \quad G(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

将(2)和(3)写成一个简单的矢量形式, 我们便得到一个方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(t)x(t) + G(t) \\ x|_{t=t_k} = x(t_k) \end{cases} \quad (5)$$

在我们的台风路径预报中, 需要解决的是已知 $x(t_k)$, 要找出 $x(t_{k+1})$, 这里称 $x(t_k)$ 及 $x(t_{k+1})$ 为台风在时间 t_k 及 t_{k+1} 时的状态矢量。

为了把方程(5)化为离散时间形式, 要用到线性常微分方程的一般理论:

具有初始条件 $x(t_0) = x$ 的线性非齐次方程(5)的解是

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)d\tau \quad (6)$$

并且矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 是矩阵微分方程

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = F(t) \cdot \Phi(t, t_0); \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (7)$$

的解, 式中 I 为单位矩阵^[6]。

我们可以近似地将 f 视为常数 (严格地说, 由于讨论的问题是运动中的台风, 随着台风的位移, f 亦随之可能变化, 但为了简化问题, F 矩阵近似地作为常数矩阵处理), 因此方程(7) 的解可以写成^[12]

$$\Phi(t, t_0) = e^{(t-t_0)F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{f} \sin f(t-t_0) & \frac{1}{f} [1 - \cos f(t-t_0)] \\ 0 & 1 & -\frac{1}{f} [1 - \cos f(t-t_0)] & \frac{1}{f} \sin f(t-t_0) \\ 0 & 0 & \cos f(t-t_0) & \sin f(t-t_0) \\ 0 & 0 & -\sin f(t-t_0) & \cos f(t-t_0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$\Phi(t, t_0)$ 称为状态转移矩阵, 它表示从 t_0 时刻到 t 时刻系统状态的转移程度。

若令 $t = t_1$, 则(6)式可写成如下的形式

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau \quad (9)$$

如果采用角标 $k+1$ 和 k 来代替角标 1 和 0, 那么(9)式可写成

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau \quad (10)$$

现在把上式等号右边写成矩阵形式

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-t_k) & \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-t_k)] \\ 0 & 1 & -\frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-t_k)] & \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-t_k) \\ 0 & 0 & \cos f(t_{k+1}-t_k) & \sin f(t_{k+1}-t_k) \\ 0 & 0 & -\sin f(t_{k+1}-t_k) & \cos f(t_{k+1}-t_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \\ x_3(t_k) \\ x_4(t_k) \end{pmatrix} \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-\tau) & \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-\tau)] \\ 0 & 1 & -\frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-\tau)] & \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-\tau) \\ 0 & 0 & \cos f(t_{k+1}-\tau) & \sin f(t_{k+1}-\tau) \\ 0 & 0 & -\sin f(t_{k+1}-\tau) & \cos f(t_{k+1}-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1(\tau) \\ G_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \quad (11)$$

从(11)式可以看出, 它的右端的自由项 $G(\tau)$ 对解案的影响表现在(10)式中的积分项; 而右端第一项表现为初始条件 $\mathbf{x}(t_k)$ 对解案的影响, 这影响又是通过状态转移矩阵 $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ 来实现的, 因此状态转移矩阵 $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ 又称影响矩阵, 它是台风从 t_k 时刻状态 $\mathbf{x}(t_k)$ 发展到 t_{k+1} 时刻状态 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 的过渡函数。

将(11)式展开:

$$\begin{cases}
 x_1(t_{k+1}) = x_1(t_k) + \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-t_k) \cdot x_3(t_k) + \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-t_k)] \cdot x_4(t_k) \\
 \quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_1(\tau) + \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-\tau)] \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau \\
 x_2(t_{k+1}) = x_2(t_k) - \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-\tau)] \cdot x_3(t_k) + \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot x_4(t_k) \\
 \quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ -\frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-\tau)] \cdot G_1(\tau) + \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau \\
 x_3(t_{k+1}) = x_3(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \cos f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_1(\tau) + \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau \\
 x_4(t_{k+1}) = x_4(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ -\sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_1(\tau) + \cos f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau
 \end{cases} \quad (12)$$

我们先考察(12)的第一式,等号右边第一项 $x_1(t_k)$ 是预报起始时刻的状态,第二第三项中的 f 在预报时效内可当作常数(由于短期内台风纬度变化不大),于是这二项也容易解决。困难的是第四项,因为 $G_1(\tau)$ 和 $G_2(\tau)$ 是目前还难以确定的随机函数。同样,(12)式的其余各式也包含着 $G_1(\tau)$ 和 $G_2(\tau)$,为此我们采取下述方法来处理。

把(12)各式等号右边的非积分项移到等号的左边,得到:

$$\begin{cases}
 \hat{x}_1(t_{k+1}) = x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k) - \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-t_k) \cdot x_3(t_k) - \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-t_k)] \cdot x_4(t_k) \\
 \quad = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_1(\tau) + \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-\tau)] \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau \\
 \hat{x}_2(t_{k+1}) = x_2(t_{k+1}) - x_2(t_k) + \frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-t_k)] \cdot x_3(t_k) - \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-t_k) \cdot x_4(t_k) \\
 \quad = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ -\frac{1}{f} [1 - \cos f(t_{k+1}-\tau)] \cdot G_1(\tau) + \frac{1}{f} \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau \\
 \hat{x}_3(t_{k+1}) = x_3(t_{k+1}) - x_3(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \cos f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_1(\tau) + \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau \\
 \hat{x}_4(t_{k+1}) = x_4(t_{k+1}) - x_4(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \sin f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_1(\tau) + \cos f(t_{k+1}-\tau) \cdot G_2(\tau) \right\} d\tau
 \end{cases} \quad (13)$$

于是可以根据台风历史资料求得(13)的积分项,并借助逐次回归方法求得表达积分项的线性回归方程。将这些线性表达式以向量 $\Gamma u(t_k)$ 来表示, $\Gamma u(t_k)$ 是 t_k 时刻诸预报因子 (u_1, u_2, \dots, u_n) 的线性回归方程。

于是(10)式便成为我们所要建立的模式:

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) x(t_k) + \Gamma u(t_k) + w(t_k) \quad (14)$$

式中

$$\Gamma u(t_k) + w(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) d\tau$$

实际上 $w(t_k)$ 是用 $\Gamma u(t_k)$ 近似地代替积分项后的剩余残差。

从(14)式可以清楚地看出,为使 $X(t_{k+1})$ 更加切合客观实际,我们应当从提高回归方程 $\Gamma u(t_k)$ 的质量使残差 $w(t_k)$ 尽量缩小和使 $x(t_k)$ 更加精确这二个方面去考虑。

为了提高 $\Gamma u(t_k)$ 即回归方程的质量, 我们着眼于改进预报因子, 提供筛选的预报因子包括两部分, 第一部分是气候学和持续性因子, 天气经验因子及网格点因子^[8]; 第二部分是由动力学模式中推导出来的一些因子^[3]。因为我们将 60 h 的台风路径对时间等分为 10 个时段(每一时段为 6 h), 每个时段建立 4 个回归方程, 所以 10 个时段共建立 40 个回归方程。

为了使 $x(t_k)$ 更加精确, 我们采用了 Kalman 滤波方法。

这里要注意的是我们每一步都是以 t_k 时刻的实际状态 $x(t_k)$ 作为起始点, 通过状态转移矩阵 $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ 转变为 t_{k+1} 时刻的状态 $\hat{x}(t_{k+1})$, 然后从 $\hat{x}(t_{k+1})$ 与 t_{k+1} 时刻的实际状态 $x(t_{k+1})$ 之间的差异建立回归方程。当预报时, 第一步用 t_k 时刻的实际状态 $x(t_k)$ 作为起始点, 而以后各步都是用它前一步的预报状态作为起始点。

三、Kalman 滤波器的实现方案

动力学模式(14)表明, 台风的预报位置除了和回归方程的好坏有关外, 还和 t_k 时刻台风初始状态是否正确有关系, 为了取得一个比较好的台风初始状态, 我们采用 Kalman 最佳线性递推滤波方法^[6,9]。

在我们所建立的动力学模式(14)中

$$w(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) d\tau - \Gamma u(t_k)$$

称为随机干扰矢量, 为不可预测的随机向量, 一般假定它是均值为零的独立随机序列, 即

$$E\{w(t_k)\} = 0,$$

其协方差矩阵为:

$$E\{w(t_k)w^T(t_j)\} = Q(t_k)\delta_{kj} \quad (15)$$

式中

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

$Q(t_k)$ 是一个已知的 4×4 的非负定矩阵, 它反映了系统随机干扰的二阶统计特征。

我们已经在每个时段 $t_k (k=1, 2, \dots, 10)$ 上建立了四个回归方程, 因此通过它可以进行历史资料的拟合计算出 $\hat{w}(t_k)$, 从而可估算出

$$E\{\hat{w}(t_k) \cdot \hat{w}^T(t_j)\} = \hat{Q}(t_k)\delta_{kj} \quad (k=1, 2, \dots, 10)$$

设 $y(t_k)$ 为 t_k 时刻的台风观测位置, 是二维向量 (x, y) , 而 $x(t_k)$ 是 t_k 时刻的台风状态矢量, 是四维向量 (x, y, u, v) , $y(t_k)$ 的向量维数小于 $x(t_k)$ 的向量维数, 符合于滤波动力学模式的要求, 于是观测值 $y(t_k)$ 与 $x(t_k)$ 间有下列关系式:

$$y(t_k) = M(t_k)x(t_k) + V(t_k) \quad (16)$$

其中 $M(t_k)$ 为系数矩阵, 在台风模式中

$$M(t_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

式中 $V(t_k)$ 为观测噪声, 即观测误差, 它同样是一个随机因素, 与(15)式相同有

$$E\{V(t_k)\} = 0$$

$$E\{\mathbf{V}(t_k)\mathbf{V}^T(t_j)\} = \delta_{kj}R(t_k)$$

$R(t_k)$ 是一个 2×2 的非负定矩阵, 它是由飞机或雷达测定台风中心位置所产生的误差^[11]。一般我们认为不受时段的影响, 即 $R(t_k)$ 不随时间变化。

由于 $\boldsymbol{w}(t_k)$ 是由种种原因造成的台风位置的模式误差, 而 $\mathbf{V}(t_k)$ 是对台风的观测误差, 显然它们之间没有任何的必然联系, 所以 $\boldsymbol{w}(t_k)$ 和 $\mathbf{V}(t_k)$ 认为是互相独立的, 于是存在:

$$E\{\boldsymbol{w}(t_k)\mathbf{V}(t_j)\} = 0 \quad (\text{对任意的 } k, j)$$

所谓滤波, 广义地说就是要根据序列 $[\mathbf{y}(t_k)]$ 计算出某一时刻 t_j 的状态值 $\mathbf{x}(t_j)$, 如上所述由于观测误差的存在, 我们不能计算出正确的值 $\mathbf{x}(t_j)$, 而只能得出尽可能接近于 $\mathbf{x}(t_j)$ 的计算值, 或称“估值”, 我们用符号 $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_j)$ 表示它, 下标 k 表示此计算值是根据 k 次观测所得的结果。

按照 j 与 k 之间的关系, 滤波可区分为三种情况: 1) $j > k$ 为预测问题, 2) $j = k$ 为滤波问题, 3) $j < k$ 为平滑问题。这里我们只讨论前二种情况, 即 $j = k$ 和 $j > k$ 的情况。

如何计算滤波值 $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_j)$ 才能使之接近其真值 $\mathbf{x}(t_j)$ 呢, 就有一个“最佳准则”的问题, 显然, 滤波计算的方法必须使误差满足:

$$E\{[\mathbf{x}(t_j) - \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_j)]^T [\mathbf{x}(t_j) - \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_j)]\} = \min \quad (17)$$

这就是最小均方误差准则。

我们根据状态方程(14)和(16)以及最佳准则(17)可以导出 Kalman 滤波方程。

设已获得台风的观测值 $\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_k)$, 并找到了 t_k 时刻台风的状态矢量 $\mathbf{x}(t_k)$ 的一个最佳滤波估计值 $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)$, 但是还没有 t_{k+1} 时刻的新的观测值 $\mathbf{y}(t_{k+1})$, 那么根据已有的资料我们对 t_{k+1} 时刻的状态 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 作出什么样的预测呢? 由于(14)式中 $\boldsymbol{w}(t_k)$ 是一个不可预测的随机矢量, 只能用

$$\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k) + \Gamma\boldsymbol{u}(t_k) \quad (18)$$

作为对系统状态矢量 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 的一个预测估计, 而且当 $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_k)$ 是状态 $\mathbf{x}(t_k)$ 的最佳线性滤波估计值时, $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1})$ 也应当是对 t_{k+1} 时刻台风状态矢量 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 的最佳预测估计。同样, 通过(16)式可以估计在 t_{k+1} 时刻可能的观测值应为:

$$\hat{\mathbf{y}}(t_k|t_{k+1}) = M(t_{k+1})\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1}) \quad (19)$$

如果我们在 t_{k+1} 时刻观测到了台风的位置为 $\mathbf{y}(t_{k+1})$, 则与(19)的估计值的误差等于

$$\mathbf{y}(t_{k+1}) - \hat{\mathbf{y}}(t_k|t_{k+1}) = \mathbf{y}(t_{k+1}) - M(t_{k+1})\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1}) \quad (20)$$

产生这个误差的原因有二个, 一是我们在 t_k 时刻对 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 的预测 $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1})$ 有误差, 另一方面在 t_{k+1} 时刻观测台风时, 本身存在着观测方面的误差。

为了得到状态矢量 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 的滤波估计值 $\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_{k+1})$, 我们利用(20)式这个误差量去适当地修正 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 的预测估计 $\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1})$, 在线性估计范围内, 通常都采用加权办法来作修正, 这样 $\mathbf{x}(t_{k+1})$ 的滤波估计可表示为:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1}) + K(t_{k+1})[\mathbf{y}(t_{k+1}) - M(t_{k+1})\hat{\mathbf{x}}(t_k|t_{k+1})] \quad (21)$$

式中 $K(t_{k+1})$ 是一个待定的矩阵, 叫做滤波器的增益矩阵, 根据最小均方误差的准则可以导出最佳增益矩阵 $K(t_{k+1})$, 于是我们可以得到 $\hat{x}(t_{k+1})$ 的最佳线性滤波递推公式^[6,9]:

$$\begin{cases} \hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{x}(t_k|t_{k+1}) + K(t_{k+1})[y(t_{k+1}) - M(t_{k+1})\hat{x}(t_k|t_{k+1})] \\ K(t_{k+1}) = P(t_k, t_{k+1})M^T(t_{k+1})[M(t_{k+1})P(t_k, t_{k+1})M^T(t_{k+1}) + R \\ (t_{k+1})]^{-1} \\ P(t_k, t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)P(t_k, t_k)\Phi^T(t_{k+1}, t_k) + Q(t_{k+1}) \\ P(t_{k+1}, t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})M(t_{k+1})]P(t_k, t_{k+1})[I - K(t_{k+1})M \\ (t_{k+1})]^{-1} + K(t_{k+1})R(t_{k+1})K^T(t_{k+1}) \end{cases} \quad (22)$$

式中 $\hat{x}(t_k|t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\hat{x}(t_k|t_k) + \Gamma u(t_k)$, 其余符号与[6,9]相同。

在实际作台风预报及用滤波方法来订正当时的台风位置时, 还需要初始条件即滤波初值 $\hat{x}(t_0|t_0)$ 和滤波误差方差阵初值 $P(t_0, t_0)$, 对于这些初始条件, 我们采用在起报点之前先用 Kalman 滤波方法作若干步后的 $\hat{x}(t_i|t_i)$ 和 $P(t_i, t_i)$ 作为初始条件。在使用 Kalman 滤波方法时, 我们把台风的飞机探测、雷达探测或卫星探测位置直接作为它的初值 $\hat{x}'(t_0|t_0)$, 对于初值 $P'(t_0, t_0)$, 我们很难得到准确的估值, 为此我们取

$$P'(t_0, t_0) = \frac{1}{\epsilon} I$$

其中 ϵ 为任意小的正数, I 是单位矩阵。当然第一步把 $P'(t_0, t_0)$ 代入公式(22)对增益矩阵是不便计算的, 为此, 第一步采用变换后的公式^[6,9]:

$$\begin{cases} \hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\hat{x}(t_k|t_k) + \Gamma u(t_k) + K(t_{k+1})[y(t_{k+1}) \\ - M(t_{k+1})(\Phi(t_{k+1}, t_k)\hat{x}(t_k|t_k) + \Gamma u(t_k))] \\ K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}, t_{k+1})M^T(t_{k+1})R^{-1}(t_{k+1}) \\ P(t_k, t_{k+1})^{-1} = [\Phi(t_{k+1}, t_k)P(t_k, t_k)\Phi^T(t_k, t_{k+1}) + Q(t_{k+1})]^{-1} \\ P(t_{k+1}, t_{k+1})^{-1} = P(t_k, t_{k+1})^{-1} + M^T(t_{k+1})R^{-1}(t_{k+1})M(t_{k+1}) \end{cases} \quad (23)$$

从第二步起仍采用公式(22)。另外, 对 $Q(t_{k+1})$ 和 $R(t_{k+1})$ 如前所述可以从统计分析得到^[10,11]。

经过几步滤波后, 我们得到了初值 $\hat{x}(t_0/t_0)$ 和 $P(t_0, t_0)$ 即起报点的初始状态。从统计观点和历史拟合情况来看, 它比直接采用初始定位资料要准确, 因此它将直接影响到台风路径动力-统计预报偏差的减小。

如果我们在起报点之前已进行了 k 次滤波得到了初始状态, 那么从此状态起进行 $k+1$ 次 Kalman 滤波在计算误差 $[y(t_{k+1}) - M(t_{k+1})\hat{x}(t_k/t_{k+1})]$ 时, 需要新的观测值 $y(t_{k+1})$, 通常的处理方法^[6]是采用前一次的误差 $[y(t_k) - M(t_k)\hat{x}(t_{k-1}|t_k)]$ 来代替。以解决这一矛盾。但经我们多次试验, 发现这样处理不够理想, 有时反而会出现较大的偏差, 因此我们采用了起报点之前 k 次滤波误差 $[y(t_i) - M(t_i)\hat{x}(t_{i-1}|t_i)]$ ($i=1, 2, \dots, k$) 的平均值作为 $k+1$ 次滤波误差。然后以 $k+1$ 次滤波误差乘 $k+1$ 次增益矩阵 $k(t_{k+1})$ 作为 $k+2$ 次滤波误差, 依次类推。试验证明, 这样的处理方法既能反映出各次滤波误差的特性, 又具有一定的稳定性, 因此对这样的滤波只要适当的进行几次就可以足见成效。

以上最佳线性滤波估计的实现方案和工作步骤可用 343 页的计算框图来表示。

四、预报效果检验

为了与台风路径统计-动力业务预报方案进行比较,我们在用上述方法建立预报模式时仍采用 ZMI-80^[3]方案的因子和样本。表 1 给出了滤波与不滤波二种情况对 222 个历史样本拟合误差的比较(观测路径全部用最佳路径资料)。

表 1 滤波与不滤波二种情况对历史样本拟合误差的比较(单位: 纬距)

绝对平均误差 预报方案	预报量							
	λ_{24}	φ_{24}	λ_{36}	φ_{36}	λ_{48}	φ_{48}	λ_{60}	φ_{60}
Kalman滤波方案	0.69	0.61	1.19	1.10	2.06	1.67	2.56	2.32
不滤波方案	0.81	0.75	1.44	1.33	2.43	1.95	3.00	2.71

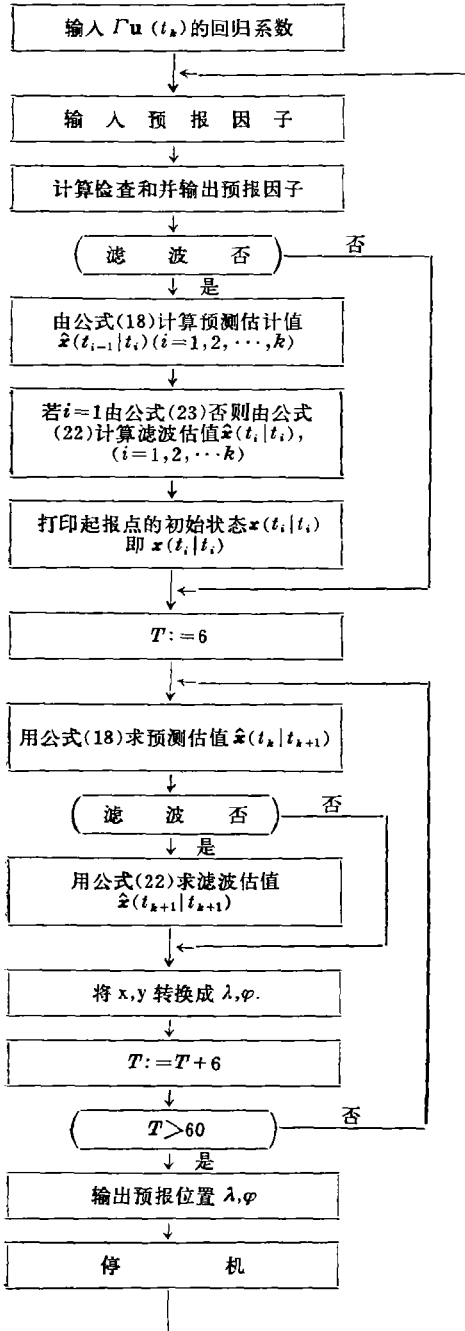
表 1 显示了滤波后的拟合误差明显的小于不滤波的情况,这意味着 Kalman 滤波方案将具有比较好的预报性能。

为了检验 Kalman 滤波方案的预报效果,我们同时用 Kalman 滤波方案与统计-动力业务预报方案 ZMI-80^[3]对 1980—1982 年 7—9 月的 13 个台风进行了 67 次同台风同时次的独立样本检验,从预报路径趋势看,多数情况有所改善。表 2 给出了二个方案对 13 个台风 67 次独立样本预报的绝对平均误差。

表 2 二个方案绝对平均误差的比较(单位: 纬距)

误差 预报方案	预报量							
	λ_{24}	φ_{24}	λ_{36}	φ_{36}	λ_{48}	φ_{48}	λ_{60}	φ_{60}
Kalman滤波方案	0.7	0.6	1.3	1.1	1.9	1.6	2.2	2.1
ZMI-80方案 ^[3]	0.8	0.6	1.5	1.3	2.2	1.8	2.6	2.4

从表 2 我们看到 Kalman 滤波方案预报的绝对平均误差,多数比 ZMI-80^[3]要小,值得注意的是,随着预报时效的延长,改进得比较明显,这说明在台风路径预报的动力-统计模式中采用 Kalman 最佳线性递推滤波方法,不仅对台风的初始定位误差起到了一定的



最佳线性滤波估计计算框图

订正作用,同时由于模式中考虑了台风移动的历史路径,所以对台风移向的随机摆动和速度快慢的误差也起到了一定的修正作用。图1和图2给出了这二种方案分别对1981年14号台风和1982年11号台风的预报结果。图中可见,无论是1981年14号台风还是1982年11号台风,在移动方向和移动速度的预报上,Kalman滤波方案均比ZMI-80方案要好。

为了进一步检验Kalman滤波方案的预报性能,我们将Kalman滤波方案与业务预报的ZMI-80^[3]方案对1983年7—9月的4号、5号、9号和10号等4个台风以及1984年7—9月的3号、6号、7号、9号和11号等5个台风分别进行了17次和15次同台风同时次的实时预报的比较,表3分别给出了这二个方案对1983年7—9月共17次台风和1984年7—9月共15次台风预报的平均方向误差和距离误差。

表3 二个方案预报的平均方向误差和距离误差的比较

误差 预报方案		24 h		48 h	
		方向误差(°)	距离误差(纬距)	方向误差(°)	距离误差(纬距)
1983年	Kalman滤波方案	13.3°	1.2	16.4°	2.7
	ZMI-80方案	17.1°	1.5	23.2°	3.4
1984年	Kalman滤波方案	15.1°	1.5	17.8°	3.0
	ZMI-80方案	17.5°	1.9	22.3°	4.0

表3的结果与表2的结果基本上是一致的,这说明Kalman滤波方案在作台风路径的实际预报时具有一定的稳定性。

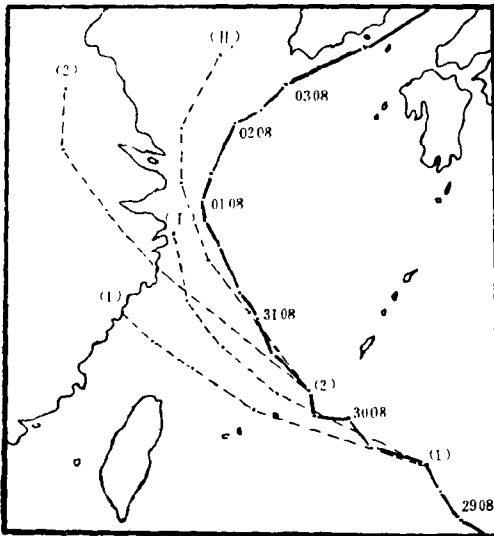


图1 1981年14号台风预报路径图
(实线为实际路径,虚线(1),(2)和(I),(II)分别为ZMI-80方案和Kalman滤波方案的预报路径)

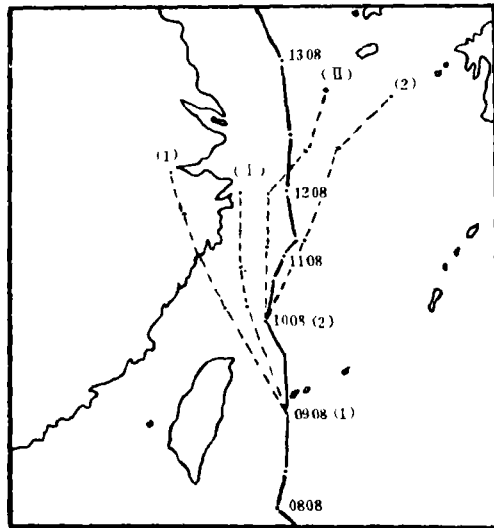


图2 1982年11号台风预报路径图
(实线为实际路径,虚线(1),(2)和(I),(II)分别为ZMI-80方案和Kalman滤波方案的预报路径)

五、讨 论

1. 台风路径动力-统计预报的 Kalman 滤波方法, 不仅对台风的初始状态作了修正, 而且充分地考虑了台风移动的历史路径和当时的天气形势。在公式(18)中可以看出, t_{k+1} 时刻状态矢量的预测估计 $\hat{\mathbf{x}}(t_k | t_{k+1})$ 取决于 t_k 时刻状态矢量的滤波估计 $\Phi(t_{k+1}, t_k) \hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)$ 和回归估计 $\Gamma \mathbf{u}(t_k)$ 。在 t_k 时刻的回归估计这一项中, 为了使残差尽量减小, 我们在预报因子上既考虑了天气经验因子以充分反映预报员的实践经验, 而且同时也考虑了动力学模式中推导出来的一些因子以充分反映台风移动的动力学规律。另外, 在 t_k 时刻状态矢量的滤波估计这一项中, 首先考虑了状态转移矩阵 $\Phi(t_{k+1}, t_k)$, 我们知道, 这个函数实际上与地转参数 f 有关, 对于一次西行台风来说, 由于台风中心纬度变化不大, 这一项还不大重要, 可是对于北上或转向台风来说, 这一项的贡献就明显了, 在实际预报中, 对北上台风的预报要比西行台风的预报更加困难, 所以考虑了这个因素, 无疑对北上台风或转向台风的径度预报将会有所改善, 事实上从图 1—2 和表 2—3 的独立样本检验和实际预报中已经清楚地反映了这个情况, 即随着预报时效的延长, 纬向位移的预报误差比经向位移的预报误差改进得更加明显。

2. 如果台风中心的探测位置完全正确, 那末用滤波估计便失去了作用, 反而增加了很多不必要的计算量, 而事实上, 目前不论用什么方法来探测台风中心的位置, 都存在着相当程度的误差, 即使飞机探测台风中心, 一般误差也有 20—30 n mile, 因此采用滤波估计值 $\hat{\mathbf{x}}(t_k | t_k)$ 也可以改进台风路径预报的质量。从滤波估计方程(22)中可以发现, 我们现在用的 t_{k+1} 时刻的估计状态值既考虑了当时的探测位置 $\mathbf{y}(t_{k+1})$, 又考虑了前一时刻 t_k 对 t_{k+1} 时刻的预测估计值 $\hat{\mathbf{x}}(t_k | t_{k+1})$, 可以说这是兼有两者而得出的值, 从统计的观点和从平均的观点来看, 用这个方法所定下的台风中心位置应该是最佳的, 因为它满足(17)式的最小均方误差准则。所以在独立样本检验中, 我们发现该方案优于 ZMI-80 方案的另一个方面, 是在对同一个台风的几次预报中, 后一次预报总是比前一次预报更接近实况, 即后一次总是比前一次报得好, 不会出现时好时坏的不稳定现象。

3. 目前, 除了 $\mathbf{W}(t_k)$ 以外, 对于积分项 $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau$, 我们也是作为随机项处理, 而用逐步回归方法来求取, 可是积分项并不都是随机因素的总和, 当然我们可以努力改进预报因子的选择来提高 $\Gamma \mathbf{u}(t_k)$ 的质量, 但更重要的是应该想法把中间可用动力学方程模拟的必然成份分离出来, 使随机因素减小到最低限度, 虽然目前还无法做到, 但也是我们努力改进的方向之一。

参 考 文 献

- [1] Neumann, J., and B. Lawrence, An operational experiment in the statistical-dynamical prediction of tropical cyclone motion, *Mon. Wea. Rev.*, 103, 665—673, 1975.
- [2] 吴中海、许绍溥, 西北太平洋台风路径统计—动力预报 SD₇₅ 方案, 科学通报, 25, 548—551, 1980.
- [3] 金一鸣、周洪祥、赵丽仙, 第二警界区台风路径的统计—动力学预报方案 ZMI-80, 海洋学报, 4, 679—687, 1982.
- [4] 董克勤等, 一种改进的引导气流预报台风路径的方法, 数值预报和数理统计预报会议论文集, 科学出版社, 57—59, 1974.
- [5] 金一鸣、周洪祥, 台风路径统计—动力预报初始场的一个改进, 科学通报, 12, 741—743, 1982.

- [6] 敬喜编, 卡尔曼滤波器及其应用基础, 16—73, , 国防工业出版社, 1973。
- [7] 笠原彰、增田善信著, 朱抱真译, 台风论, 60—72, 科学出版社, 1958。
- [8] 金一鸣、蔡金祥、刘宁生, 台风路径统计预报 79 年改进方案, 1981 年台风会议文集, 243—247, 上海科学技术出版社, 1981。
- [9] Kalman, R.E., A new approach to linear filtering and prediction problems, TRANS. ASME Basic Eng., 82 D, 34—45, 1960.
- [10] 吴中海, 西北太平洋台风定位误差的统计分析, 气象学报, 40, 109—116, 1982。
- [11] 王志烈、李多武, 台风探测和业务定位的误差分析, 气象, 8, 9—10, 1981。

KALMAN FILTERING METHOD IN THE DYNAMICAL-STATISTICAL PREDICTION OF TYPHOON TRACKS

Jin Yiming

(Zhejiang Institute of Meteorological Sciences)

Zhou Hongxiang

(Zhejiang Institute of Computational Techniques)

Abstract

In this paper, we have discussed the problems in predicting the typhoon track using a dynamical-statistical model. We have adopted the Kalman filter, and have discussed the error estimation in the dynamical-statistical prediction by using the Kalman filter. It is found that by using the Kalman filter in the dynamical-statistical prediction model we can improve the prediction of the typhoon track (both in direction and speed), and that it is useful in operational forecasting practice.