

Lagrange 与 Euler 时间积分尺度之间关系 的统计动力学物理模型*

徐大海

(中国气象科学研究院)

提 要

本文给出了平稳、均匀湍流中平衡涡度及非平衡涡度偏差的定义,建立了 Euler 及 Lagrange 湍流的随机动力微分方程,解出了各自相关函数。在各向同性及冻结湍流假设中使用 Blanton 公式按上述相关函数解出了 Lagrange 时间尺度与 Euler 尺度比的表达式,其渐近值恰为全方向湍流度的倒数的 $1/\sqrt{2}$ 倍即 $0.71/i$ 。

一、引 言

自从 1921 年 Taylor^[1] 创立流体质点的湍流扩散统计理论以来, Lagrange 相关或谱理论与实验研究即为十分关键的课题。目前, 大气扩散或湍流交换的全部正式关系式中都含有 Lagrange 相关曲线或谱参数。虽然 Lagrange 湍流速度均方差可用固定点测量合理代替, 但 Lagrange 尺度却不可能用固定点的 Euler 尺度来简单代替, 经验及简单物理直观判断都说明两者存在差别。由于扩散过程的连续性, 它所涉及的运动尺度范围极广, 从天气尺度直至分子运动都与之有关。因此空气质点定义的本身就成为不明确概念。即使用人工质点代替空气质点进行实验也存在不少困难, 例如该质点所能代替的空气质点尺度问题, 人工质点空气动力特性的影响问题等等。从纯理论观点而言, 除使用分子质点外几乎无法测量空气质点的 Lagrange 时间尺度, 这就严重地影响了 Taylor 理论的应用。另一方面, 固定测点的 Euler 时间尺度易于测量并且已有大量室内外实测数据。这样 Lagrange 和 Euler 尺度之间关系的确定无论在理论上及实际应用上都有着重大意义。1983 年以前的有关工作, Pasquill 已作了总结^[2], 其中最具有代表性的研究是 Saffman^[3](1963) 及 Philip^[4](1967) 给出的, 他们按 Corrsin(1959)^[5] 的猜想, 即长时间迁移后的粒子湍速是固定点观测湍流的无偏估计值, 导出了 Lagrange 相关及 Euler 相关系数的如下关系

$$R_L(\tau) = \int_0^{\infty} R_E(r, \tau) P(r, \tau) dr$$

只要给定 R_E 及 P 的函数形式即可求取 R_L , 然而仍然不知如何从理论求取 R_E 的显式, 只能给假设, 并按经验计算式 $T_L/T_E = c/i$ 推算了常数 C 值, 他们各自给出 $C = 0.35$ 和

* 本文于 1990 年 5 月 11 日收到, 1990 年 9 月 29 日收到修改稿。

0.8, i 为湍流度。Corrsin 1963 年^[6]设 Euler 及 Lagrange 谱在惯性子区均可用同一形式表达,也得到两尺度比值与湍流度成比例,比例常数 C 仍需由湍谱观测求取。直到 1988 年 Wang^[7]等人又沿着谱理论的途径对此问题作研究。他们假设湍流速度场为 Kraichnan (1970) 高斯场,从而给定了能谱函数,再设移动坐标中 Euler 单点自相关函数亦为高斯式。最后给出的 T_L/T_E 的函数仍不能用固定坐标的 Euler 测量表达,难以验证。这些理论的基础和结论显然是不完善的。正如 Pasquill(1983)^[2]所说:这些结论的准确含意及其局限性至今还不是非常清楚。

在野外试验中常用经验公式 $T_L/T_E = \beta = c/i$, c 值离散程度很大,可大于 0.8, 小于 0.3, 一般小于 1。这可能依赖于测量时使用的采样及平均时间和当时大气稳定度状态。风洞测量在可控制条件下进行,结果要集中些,Snader 和 Lumley(1971)^[8]的实验表明 C 的渐近值为 1, 文献[7]提到 Wells 在 1982 年总结了一些实验结果表明 β 的变化范围在 1—20, Snader 等^[8]的风洞测试 $\beta = 3$, 在大气中对中性条件开阔地区习惯取 $\beta = 4$ 。

从以上研究的历史可见,纯粹的谱理论很难求得物理意义很明确的结果,因为湍谱本身的理论尚未解决完善。本文尝试将流体动力学方程随机化,其中将运动在尺度上分为三级,第一级为定常平均运动,第二级为具有一定自相关尺度的湍流脉动,第三级为自相关尺度为零的‘白噪声’脉动。由此而建立起来的随机微分方程表明了次尺度的随机‘白噪声’运动在满足一定宏观规律条件下,产生了有相关的高一级尺度的湍流脉动,它的相关尺度和次尺度运动的统计量有关。物理过程与由分子热运动产生液体中悬浮颗粒的随机有相关运动即 Brown 运动的物理过程类似。当解出相关函数后,再利用 Blaton 定理,确定出 Euler 与 Lagrange 时间尺度的关系,求得了 T_L/T_E 的表达式,它是风向脉动角的函数,其中还假定风向脉动角满足正态分布。

二、Euler 及 Lagrange 相关方程的建立与求解

若用 Euler 方程描述流体的运动,并以矢量形式表示则有

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \quad (1)$$

式中符号均为常用符号,由于这里仅考虑小尺度运动,柯氏力略去, \mathbf{F} 为外力。根据矢量分析有

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} \quad (2)$$

若以涡度 $\boldsymbol{\xi}$ 表示 $\nabla \times \mathbf{V}$, 那么(1)式可写为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \mathbf{F} \quad (3)$$

如运动定常, 上式则为

$$-\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \mathbf{F} \quad (4)$$

在理想正压条件下,外力 \mathbf{F} 有势,那么(4)式右方即为 Bernoulli 积分常数的梯度(该

梯度的方向应与流线方向垂直)。由(4)式可知无旋定常运动的 Bernoulli 常数必处处相等,反之 Bernoulli 常数不均匀之处必有涡度出现。这里称满足(4)式的涡度 ξ_b 为 Bernoulli 平衡涡。因为运动是定常的,所以 Bernoulli 涡只要存在便也是定常的,流场中的流线或质点迹线图样均不会随时间改变。若 ξ_b 不处处均匀,质点在运行过程中其迹线的曲率显然要发生变化,因为在固定点上流线与迹线曲率一致,但在不同空间点上流线曲率并不能总是相同。当运动处于非定常状态时,(3)式可写为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_b) \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_b$ 应满足(4)式,再设 $\boldsymbol{\xi}_a$ 为

$$\boldsymbol{\xi}_a = \boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{\xi} \quad (6)$$

在非定常条件下 $\boldsymbol{\xi}$ 是时间的函数, r 代表着流线图形的变形与位移,而 $\boldsymbol{\xi}_a$ 为实际涡度分布的非平衡部分,这种非平衡偏差即为局地变化动力。(5)式就表达了这种非线性过程,它可写为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}_a \quad (7)$$

由(7)式可见,一旦当流场中实际涡度分布等于 $\boldsymbol{\xi}_b$ 时,局地风矢就不再有时间变化。事实上由于能量或动量扰动在边界上的存在使得 $\boldsymbol{\xi}_a$ 非零,若在湍流已发生的情况下, $\boldsymbol{\xi}_a$ 可作为零均值的非连续随机量。再设平均风速的局地变化为零,且风速与平衡涡偏差 $\boldsymbol{\xi}_a$ 之间无相关,对(7)式平均后便可知 $\boldsymbol{\xi}_a \equiv 0$ 。当用(7)式描述湍流场局地变化时,湍流是平稳的,湍能不会随时间消涨,因为对(7)式两端点乘 \mathbf{V} 之后便立即可见这个结论。另一方面 $\boldsymbol{\xi}_b$ 是气压梯度力等的函数,在湍流状态下它的均值可设为零,这意味着在平均状态下,(4)式右方各项达到平衡(风速均值不为零), $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_b$ 之间相互独立的情况下有

$$\begin{cases} \sigma_{\xi_a}^2 = \overline{\xi_a^2} = \overline{\xi_b^2} + \overline{\xi^2} = \sigma_{\xi_b}^2 + \sigma_{\xi}^2 = \text{const} \\ \overline{\xi} = \overline{\xi_b} = \overline{\xi_a} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

在二维情形下(7)式可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \xi_a \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u \xi_a \quad (10)$$

这里 u, v 分别为 x 轴及 y 轴风速分量, ξ_a 只有垂直分量起作用,因此就用 ξ_a 表示垂直分量。这二式与描述 Brown 运动的 Langevin 方程不一样,他们将局地速度变化与涡度分布连接起来,从而更适合于研究湍流的随机运动。由于 ξ_a 不存在微分量,(9)、(10)式并不确定一个线性或非线性振动过程,而决定着具有随机频率的振动过程。它的功率谱函数可直接由自相关函数求得,自相关函数可由上二式推求,为此首先将随机量 ξ_a 标准(0,1)化,而设无量纲量 ξ'_a 及 t' 为

$$\xi'_a = \xi_a / \sigma_{\xi_a} \quad (11)$$

$$t' = \sigma_{\xi_a} t \quad (12)$$

那么 ξ'_a 的均值为零,方差为1。将(11)、(12)式代入(9)、(10)式后并省去符号“'”,所得方程在形式上全同于(9)、(10)式。以下仍使用(9)、(10)式讨论,但必须记住变换(11)、

(12)两式。为了求得自相关函数,设时间延迟为 τ ,那么(9)、(10)式可写为:

$$\frac{\partial u(t+\tau)}{\partial \tau} = -v(t+\tau)\xi_d(t+\tau) \quad (13)$$

$$\frac{\partial v(t+\tau)}{\partial \tau} = u(t+\tau)\xi_d(t+\tau) \quad (14)$$

积分(13)、(14)式可得

$$u(t+\tau) = u(t) - \int_0^\tau v(t+\tau')\xi_d(t+\tau')d\tau' \quad (15)$$

$$v(t+\tau') = v(t) + \int_0^{\tau'} u(t+\tau'')\xi_d(t+\tau'')d\tau'' \quad (16)$$

将上二式两边同乘以 $u(t)$ 并将后式代入前式的积分中再取均值便得

$$\begin{aligned} \overline{u(t)u(t+\tau)} &= \overline{u^2(t)} - \int_0^\tau \overline{u(t)v(t)\xi_d(t+\tau')}d\tau' + \\ &+ \int_0^\tau \int_0^{\tau'} \overline{u(t)u(t+\tau'') \cdot \xi_d(t+\tau')\xi_d(t+\tau'')}d\tau'd\tau'' \end{aligned} \quad (17)$$

由于 u, v 与 ξ_d 之间无相关,(17)式右方第二项应为零(见(9)式)。由于 $\tau' \neq \tau''$ 时 $\xi_d(t+\tau')$ 与 $\xi_d(t+\tau'')$ 互相独立,当 $\tau' = \tau''$ 时二者全同,因此有^[9]

$$\overline{\xi_d(t+\tau')\xi_d(t+\tau'')} = \delta(\tau' - \tau'') \quad (18)$$

那么(17)式右方第三项为

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int_0^{\tau'} \overline{u(t)u(t+\tau'') \cdot \xi_d(t+\tau')\xi_d(t+\tau'')}d\tau'd\tau'' \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau'} \overline{u(t)u(t+\tau'')}\delta(\tau' - \tau'')d\tau''d\tau' \\ &= \int_0^\tau \overline{u(t)u(t+\tau')}d\tau' \end{aligned} \quad (19)$$

因为 $\delta(\tau' - \tau'')$ 为 Dirac 函数。考虑到 $\overline{u^2(t)}$ 为速度均方差 σ_u^2 ,那么将(17)式两边同除以 σ_u^2 并以

$$R_{uE}(\tau) = \overline{u(t)u(t+\tau)} / \sigma_u^2 \quad (20)$$

代入(17)、(19)式后得(下标 E 表示该量为 Euler 的)

$$R_{uE}(\tau) = 1 - \int_0^\tau R_{uE}(\tau')d\tau' \quad (21)$$

对 τ 求微商后得

$$\frac{dR_{uE}(\tau)}{d\tau} = -R_{uE}(\tau) \quad (22)$$

它的解为

$$R_{uE}(\tau) = e^{-\tau}$$

考虑到(12)式回到通常时间单位应有

$$R_{uE}(\tau) = e^{-\sigma \varepsilon \tau} \quad (23)$$

该式满足相关系数的要求 $R(0) = 1$ 。(22)式亦可使用 Ito 积分运算从(13)、(14)式求得,同样的讨论对 v 进行后则可求得

$$R_{vE}(\tau) = e^{-\sigma \varepsilon \tau} \quad (24)$$

这种指数式相关系数的结果与 Langevin 方程所表达的 Brown 运动粒子速度自相关系数的形式完全一样,但物理内容却不完全相同。(23)或(24)式表明局地风速自相关中

时间积分尺度 T_E 与当地平衡涡偏差的均方根成反比, 即当地涡度涨落愈显著, 相关时间愈短,

$$T_E = \sigma_{\varepsilon}^{-1} \quad (25)$$

Brown 运动中粒子速度的相关时间尺度与阻尼成反比。因此用(7)式研究大气湍流的扩散与谱要比用 Langevin 方程更合适一些。

当考虑 Lagrange 运动时, 首先从 Lagrange 型运动方程出发

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - \frac{\partial u}{\partial t} \\ Y - \frac{\partial v}{\partial t} \\ Z - \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial p}{\partial b} \\ \frac{\partial p}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (26)$$

相应的连续方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} = \frac{\rho_0}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial a} \\ \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial b} \\ \frac{\partial x_0}{\partial c} & \frac{\partial y_0}{\partial c} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中, u, v, w 为标记坐标为 a, b, c 的质点速度在坐标轴 x, y, z 三方向的分量, X, Y, Z 为外作用力。这里 u, v, w, x, y, z 均为 a, b, c 及时间 t 的函数, ρ 为质点密度。在我们的问题只需考虑一个典型质点的运动, 不失一般性取其初始坐标 x_0, y_0, z_0 作为标记坐标, 这时(27)式右方的行列式为单位 1, 而(26)式中 u, v, w 这时因标记坐标已定, 他们仅是时间的函数, 因此所有对时间的偏微商均可用全微商符号表示, 即

$$\begin{bmatrix} X - \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \frac{A}{\rho_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial p}{\partial b} \\ \frac{\partial p}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (28)$$

(28)式右方也应取 $a = x_0, b = y_0, c = z_0$ 处的值, A 为 $\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(a, b, c)}$ 阵的代数余子式阵。为此, 将气压对标记坐标的微商变换为质点所在位置(必然在质点运行轨道上)的空间微商。因为:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial p}{\partial b} \\ \frac{\partial p}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (29)$$

当用初始坐标代替标记坐标后, 将(27)式代入(29)式即得

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial p}{\partial b} \\ \frac{\partial p}{\partial c} \end{bmatrix} = \frac{\rho_0}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (30)$$

将(30)式代入(28)式并用矢量表示可得

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F} \quad (31)$$

式中 \mathbf{F} 表示除气压梯度力以外的各种力的总和。(31)式事实上就是描述单个质点运动的 Lagrange 方程,该质点坐标初始值为 x_0, y_0, z_0 , 在 t 时刻的位置为 x, y, z , (31) 式右方各项为该质点在该时刻该位置时所受的力。仍用平衡涡概念,将(4)式引入(31)式可得

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}_b + \nabla \frac{V^2}{2} \quad (32)$$

即将(31)式右方各项的作用看成空间分布着的涡度 $\boldsymbol{\xi}_b$ 及空间分布着的动能梯度的作用。设在质点轨道不同位置上 $\boldsymbol{\xi}_b$ 及 $\nabla \frac{V^2}{2}$ 是随机变化的,它们的分量都是具有零均值、常值方差的白噪声,那么二维情形下(32)式可写为

$$\frac{du}{dt} = -v\xi_b + c_x \quad (33)$$

$$\frac{dv}{dt} = u\xi_b + c_y \quad (34)$$

其中 $c_x = \nabla_x \frac{V^2}{2}$, $c_y = \nabla_y \frac{V^2}{2}$, $V^2 = u^2 + v^2$, 且 $\bar{c}_x = \bar{c}_y = \bar{\xi}_b = 0$, $\sigma_{\xi_b}^2, \sigma_{c_x}^2, \sigma_{c_y}^2$ 都为有限常量。

设无量纲涡度、时间、动能梯度分别为

$$\xi'_b = \xi_b / \sigma_{\xi_b}, t' = t \sigma_{\xi_b}, c'_x = c_x / \sigma_{\xi_b}, c'_y = c_y / \sigma_{\xi_b} \quad (35)$$

将(35)代入(33),(34)式后,省去符号“'”,所得方程全同于(33)与(34)式。以下仍使用(33)、(34)式推求Lagrange自相关函数,不过须记住(35)式。

(33)、(34)式可写为 t 时刻延迟 τ 时的微分式即

$$\frac{du(t+\tau)}{d\tau} = -v(t+\tau)\xi_b(t+\tau) + c_x(t+\tau) \quad (36)$$

$$\frac{dv(t+\tau)}{d\tau} = u(t+\tau)\xi_b(t+\tau) + c_y(t+\tau) \quad (37)$$

积分(36)、(37)式为

$$u(t+\tau) = u(t) - \int_0^\tau v(t+\tau')\xi_b(t+\tau')d\tau' + \int_0^\tau c_x(t+\tau')d\tau' \quad (38)$$

$$v(t+\tau) = v(t) + \int_0^\tau u(t+\tau'')\xi_b(t+\tau'')d\tau'' + \int_0^\tau c_y(t+\tau'')d\tau'' \quad (39)$$

考虑到 c_x 与 c_y 都为零均值白噪声,只要 τ 为有限值,它们在 τ 时段内的积分应为零。因此(38)、(39)式分别在形式上等同于(15)、(16)式。考虑到 u, v 之积与 ξ_b 的无相关性以及 $\xi_b(t+\tau')$ 与 $\xi_b(t+\tau'')$ 之间非同时相互独立性可得到

$$R_{uL}(\tau) = e^{-\sigma_{\xi_b} \tau} \quad (40)$$

$$R_{vL}(\tau) = e^{-\sigma_{\xi_b} \tau} \quad (41)$$

下标 L 表示该量是 Lagrange 的。在均匀湍流中可认为 σ_{ξ_b} 处处一样, 因此质点在运动中所经历的 ξ_b 的均方差值应与局地一点处长时间 ξ_b 的均方差相同, 然而 ξ_b 并非真实的涡度分布是无法测量的。由(40)(41)式知二者的时间尺度均为

$$T_L = \sigma_{\xi_b}^{-1} \quad (42)$$

由(42)、(25)式及(8)式可知

$$\frac{T_L}{T_E} = (1 + \sigma_{\xi_a}^2 / \sigma_{\xi_b}^2)^{\frac{1}{2}} \geq 1 \quad (43)$$

由(43)式可见在平稳、均匀湍流中 Lagrange 时间尺度比 Euler 尺度为长。

无论 ξ_a 或 ξ_b 都是难以测量或计算的量, 为了有实用价值还必须对 ξ_a 或 ξ_b 进一步分析, 以便能用可测量量将 T_L/T_E 表达出来。

三、涡旋冻结模型中的 T_L 与 T_E 的关系

如果 ξ_b 为常值且仅存在铅直分量那么(32)式就确定一个弯曲轨迹的质点运动, 因为在二维运动中的自然坐标中(32)式可写为

$$s^0 \frac{dV}{dt} + V \frac{ds^0}{dt} = -n^0 \left(V \xi_b - \frac{\partial V^2/2}{\partial n} \right) + s^0 \frac{\partial V^2/2}{\partial s} \quad (44)$$

式中 s^0 为速度方向, n^0 为法线方向, 而

$$\frac{ds^0}{dt} = -n^0 \frac{V}{r} = -n^0 K_i V \quad (45)$$

r 为轨迹曲率半径, K_i 为曲率。将(45)代入(44)式后在轨迹法线方向上的分量有

$$\xi_b = K_i V + \frac{\partial V}{\partial n} \quad (46)$$

由(46)式可见, 质点运动轨迹在各点的曲率与质点速度之积加上速度法向梯度之和恰为该点上平衡涡 ξ_b 。又若认为速度在各方向梯度的统计性质相同, 那么 ξ_b 的均方差应与 $K_i V$ 均方差的两倍相当。再设 K_i 与 V 为无相关随机量且 K_i 均值为零, V 均值为 \bar{V} , 那么有

$$\sigma_{\xi_b}^2 = 2\sigma_{K_i}^2 \cdot \sigma_V^2 (1 + \bar{V}^2 / \sigma_V^2) \quad (47)$$

σ^2 表示下标量的均方差。

另一方面(7)式描述的是风速的局地振动, ξ_a 一定时其二维解为 $V e^{i(\xi_a t + \beta)}$, $i = \sqrt{-1}$, β 为位相。在 t 时刻测点 A 处的风速 V 的方向应和半径为 r_s 的流线曲率圆相切, 切点 A 在圆上的幅角对位相角的差为 $\xi_a t$ (见图1)。显然 ξ_a 为角频。当一假想质点沿曲率圆作等速 V 圆周运动时其运动周期应为 $2\pi r_s / V = T$, 相应角频为 $2\pi/T$, 因此有

$$\xi_a = V / r_s = V K_s \quad (48)$$

其中 K_s 为每一瞬间流线曲率。当 ξ_a 为随机量时, 测点 A 处 V 及 K_s 都随机变化。若 K_s 均值为零, 有

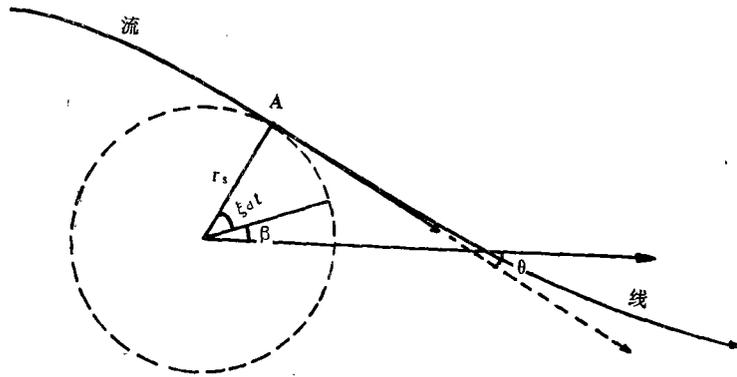


图 1 流线曲率示意图

(图中切线矢量是 V)

$$\sigma_{i_d}^2 = \sigma_{K_s}^2 \cdot \sigma_v^2 (1 + \bar{V}^2 / \sigma_v^2) \quad (49)$$

考虑到在平稳、均匀湍流中个别质点在长时间运动中的速度均值与方差同于固定点测量结果的通常假设, (47)(49)式中的 σ_v^2 及 \bar{V} 使用同一符号。

由(25)、(49)式及(42)、(47)式分别可得知

$$T_L^{-1} = \sqrt{2} \sigma_{K_t} \cdot \sigma_v (1 + \bar{V}^2 / \sigma_v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

$$T_R^{-1} = \sigma_{K_s} \cdot \sigma_v (1 + \bar{V}^2 / \sigma_v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (51)$$

那么有

$$T_L / T_R = \sigma_{K_t} / \sqrt{2} \sigma_{K_s} \quad (52)$$

由(52)式可见 Lagrange 与 Euler 时间尺度之比在平稳均匀湍流中成正比于流线曲率与迹线曲率均方根之比, 于是需要进一步确定两者曲率之间的关系。

根据 Blaton 公式我们还有

$$K_t = K_s + \frac{1}{V} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (53)$$

式中 θ 为风向角(见图 1), 然而 θ 的局地变化是微分量很难精确测量。在一定流型的流场中(53)式还可进一步简化。从(7)式可知风的局地变化是由于平衡涡偏差 ξ_s 所产生, 而 ξ_s 又可用假想圆形流线的运动表示, 按涡旋冻结模型该圆流线以平均速度 \bar{v} 向下游漂行, 那么根据文献[10]可知有以下关系存在

$$K_t^2 = K_s^2 \left(1 - \frac{\bar{V}}{V} \cos \theta \right)^2 = K_s^2 f^2(\theta) \quad (54)$$

为了求得 K_t 与 K_s 的方差的统计关系, 首先对 $f^2(\theta)$ 求平均, 因为在同一风速及同一 K_s 下, 测点在圆形流线的不同位置上 θ 值不同。若在固定测点上, 风向满足正态分布即 θ 具有概率密度

$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} e^{-\theta^2/2\sigma_\theta^2} \quad (55)$$

这里已设平均风速方向角为零

$$\begin{aligned}\overline{f^2(\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\bar{V}}{V} \cos\theta\right)^2 e^{-\theta^2/2\sigma_\theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2\bar{V}}{V} \cos\theta + \left(\frac{\bar{V}}{V}\right)^2 \cos^2\theta\right) e^{-\theta^2/2\sigma_\theta^2} d\theta \\ &= 1 - 2\frac{\bar{V}}{V} e^{-\sigma_\theta^2/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{V}}{V}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{V}}{V}\right)^2 e^{-2\sigma_\theta^2}\end{aligned}\quad (56)$$

又因 $V = \bar{V} + V'$, 那么当 $V' \ll \bar{V}$ 时有

$$\frac{\bar{V}}{V} = \frac{1}{1 + V'/\bar{V}} \approx 1 - V'/\bar{V}, \quad \left(\frac{\bar{V}}{V}\right)^2 \approx 1 - 2\frac{V'}{\bar{V}} + \left(\frac{V'}{\bar{V}}\right)^2,$$

因此 $\overline{f^2(\theta)}$ 应使用下式表达

$$\overline{f^2(\theta)} = 1 - 2e^{-\sigma_\theta^2/2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma_v^2}{\bar{V}^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma_v^2}{\bar{V}^2}\right) e^{-2\sigma_\theta^2}\quad (57)$$

又因为 σ_v^2 可分解平行于 \bar{V} 及垂直于 \bar{V} 的两部分分量 $\sigma_v^2_{\parallel}$ 及 $\sigma_v^2_{\perp}$, 且设两者相等即湍能均分条件, 那么 $\sigma_v^2 = \frac{1}{2}\sigma_v^2$ 于是有

$$\sigma_v^2/\bar{V}^2 = 2\sigma_v^2_{\parallel}/\bar{V}^2 = 2\text{tg}^2\sigma_\theta\quad (58)$$

代入(57)式并略加整理后得

$$\overline{f^2(\theta)} = 1 - 2e^{-\sigma_\theta^2/2} + \frac{1}{2}(1 + 2\text{tg}^2\sigma_\theta)(1 + e^{-2\sigma_\theta^2})\quad (59)$$

代入(54)式并对(54)式取平均则可得

$$\sigma_{k_i}^2 = \sigma_{k_s}^2 \cdot \left[1 - 2e^{-\sigma_\theta^2/2} + \frac{1}{2}(1 + 2\text{tg}^2\sigma_\theta)(1 + e^{-2\sigma_\theta^2})\right]\quad (60)$$

因此(52)式即可写成

$$T_L/T_E = 1/\sqrt{2\left[1 - 2e^{-\sigma_\theta^2/2} + \frac{1}{2}(1 + 2\text{tg}^2\sigma_\theta)(1 + e^{-2\sigma_\theta^2})\right]}\quad (61)$$

(61)式中 T_L/T_E 常用 β 来表示, 此外 β 值已可用固定测点的风向方差值表达, 这里的 σ_θ 应用弧度表示。当 σ_θ 足够小, (61)中的指数及正切函数用泰勒级数展开并保留 σ_θ^2 项则有

$$T_L/T_E \approx \frac{1}{2\sigma_\theta} \approx \frac{0.71}{i}\quad (62)$$

这里 i 为湍流度且有

$$i = \frac{\sigma_v}{\bar{V}}\quad (63)$$

考虑到(58)式而有

$$i = \sqrt{2}\text{tg}\sigma_\theta \approx \sqrt{2}\sigma_\theta\quad (64)$$

在三维情形下, 尚未深入研究, 如分为二个二维问题近似处理, 则 σ_v^2 在湍能均分湍流中应分解为三个互相垂直的分量且大小相等, 那(58)式应由下式取代

$$\sigma_v^2/\bar{V}^2 = 3\text{tg}^2\sigma_\theta \approx 3\sigma_\theta^2 \text{ 或 } i \approx \sqrt{3}\sigma_\theta\quad (65)$$

相应(61)式应为

$$T_L/T_E = 1 / \sqrt{2 \left[1 - 2 e^{-\sigma_\theta^2/2} + \frac{1}{2} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \sigma_\theta) (1 + e^{-2\sigma_\theta^2}) \right]} \quad (66)$$

同样(66)式应为

$$T_L/T_E = \frac{1}{\sqrt{6} \sigma_\theta} = \frac{0.71}{i} \quad (67)$$

(62)或(67)式比 Snader 和 Lumley(1971)^[8]风洞测量的渐近式中的常数 1 略小。如用 σ_θ 表示单分量湍流度,那么对二维湍流(稳定条件下)有

$$T_L/T_E = \frac{0.50}{\sigma_\theta} \quad (68)$$

而对三维湍流(不稳定和中性条件下)有

$$T_L/T_E = \frac{0.41}{\sigma_\theta} \quad (69)$$

对(69)式 σ_θ 也可用风倾角均方差根代替,此外在稳定条件下的小尺度三维湍流也应用(69)式。

以上结果与 Pasquill^[2]所搜集的实测数据有较好一致性,也能得到 Hanna^[11](1982)所列举的数据支持。实际上大气湍能并不一定各向均分,时间尺度也不一定单一,因此实测结果的离散性是毫不奇怪的。按文献[12]实测的 Euler 时间尺度可表达为不同相关过程的加权和即

$$T_E = \sum \alpha_i T_{Ei} \quad (70)$$

其中 α_i 可表达为 $(\sigma_{\theta i}/\sigma_\theta)^2$ 而 $\sigma_\theta^2 = \sum \sigma_{\theta i}^2$,那么求相应的 T_L 时应按 $T_{Li}/T_{Ei} = 0.71/(\sqrt{3} \sigma_{\theta i})$ 或 $0.71/(\sqrt{2} \sigma_{\theta i})$ 求算后再相加,即

$$T_L = \sum \alpha_i T_{Li} = 0.71 \sum \sqrt{\alpha_i} T_{Ei} / (\sqrt{3} \sigma_\theta) \quad (71)$$

对稳定的二维湍流,(71)式中的 $\sqrt{3}$ 应该用 $\sqrt{2}$ 代替。

为了和实测 $\beta = T_L/T_E$ 值进行比较,表 1 列出了(62)式和(67)式计算结果(对应于 Pasquill A-F 6 类稳定度级别)。

表 1 (62)及(67)式计算出的 β 值与实测值

		A	B	C	D	E	F
σ_θ , deg.		25	20	15	10	5	25
β	(62)式	1.1	1.5	1.9	2.9	5.8	11.5
	(67)式	1.0	1.2	1.6	2.3	4.7	9.7
实测数据		Hanna. 1981. 白日混合层内 ^[22] 1.4—2.1 (平均1.6—1.8)			Snader et al. 1971. 风洞测量 ^[8] 3		
		Wells. 1982. 总结在所有稳定度条件下 $\beta = 1-20$ (见文献[7])					

从表 1 可见本文计算结果略小于上述引用文献中的实测平均值,当然也存在与计算更为一致的结果,如文献[11]中就提到 β 值在 A 类稳定度为 1 逐渐增加到 F 类的 10。因此更严格的验证应在(71)式叙述的方法下进行。

四、结论与讨论

从以上分析可见,在平稳、均匀湍流中的 Euler 及 Lagrange 自相关系数均可以指数式表示。前者时间常数为平衡涡偏差,后者为平衡涡度的均方根的倒数,且 Lagrange 时间尺度必大于等于 Euler 尺度。如湍流又是各向同性且 Lagrange 和 Euler 随机速度均值,均方值对应相等,在冻结湍流假设下 β 值渐近于全分量湍流度的倒数的 $1/\sqrt{2}$ 倍即 $0.71/i$ 。对于二维湍流,上述结果的获得是较为严谨的;对三维湍流而言在理论上尚未完全解决,因为三维曲率已难于用本文中的圆运动描述。要进一步研究此问题时除了进行有目的的实验检验理论外,还需发展三维理论研究。

参 考 文 献

- [1] Taylor, G. I., Diffusion by Continuous Movements, Proc. London, Math. Soc, ser. 2, (20), 196, 1921.
- [2] Pasquill, F., and F. B. Smith, Atmospheric Diffusion, Third Edition, Ellis Horwood Limited, pp 437 1983.
- [3] Saffman, P. G., Approximate calculation of the Lagrangian Auto-Correlation Coefficient for stationary Homogeneous Turbulence, *Appl. Sci. Res. Sec., A*, 11, 245-255, 1963.
- [4] Philip, J. R., Relation between Eulerian and Lagrangian Statistics, Boundary Layers and Turbulence, Physics of Fluid Supplement, 69, 1967.
- [5] Cossin, S., Progress Report on Some Turbulence Research, Atmospheric Diffusion and Air Pollution, *Advances in Geographysics*, 6, 161, 1959.
- [6] Cossin, S., Estimation of the Relation between Eulerian and Lagrangian Scale in Large Reynolds Number Turbulence, *J. Atmos. Sci.*, 20, 115, 1963.
- [7] Wang, L. P., et al., On the Relationship between Lagrangian and Eulerian Scale for Kraichnan's Gaussian Random Velocity Field, 8th Symposium on Turbulence and Diffusion, April. 25-29, 1988, AMS. 92-95.
- [8] Snayder, W. H., and J. L. Lumley, Some measurements of particale velocity autocorrelation functions in a turbulence flow, *J. Fluid Mech*, 48, 41-47, 1971.
- [9] 王竹溪, 统计物理学导论, p. 232 人民教育出版社, 1965。
- [10] 杨大升等, 动力气象学, p.133, 气象出版社, 1983。
- [11] Hanna, S. R., et al., Handbook on Atmospheric Diffusion, US. Department of Energy, 1982.
- [12] 徐大海, 多尺度大气湍流的扩散与扩散率, 气象学报, 47, 3, 302-311, 1989。

**THE RANDOM DYNAMIC THEORY ON THE
RELATION BETWEEN LAGRANGIAN
AND EULERIAN TIME SCALE**

Xu Dahai

(Chinese Academy of Meteorological Sciences)

Abstract

In this paper the "Bernoulli's Equilibrium Vorticity" and the "Deviation of the BEV" are defined and a random dynamic model, which can give both Lagrangian and Eulerian autocorrelation functions, are set up for wind velocity fluctuations in the stationary, homogeneous turbulence. Under Taylor's hypothesis of "frozen eddies", the ratio of Lagrangian time scale to Eulerian is given as a function of the deviation of wind direction, that has asymptotic form $0.71/i$ where i is the intensity of the turbulence, if the turbulence is isotropic.