

科氏力作用下涡旋运动的等值线动力学*

罗 哲 贤

(南京气象学院, 210044)

提 要

本文提出了在科氏力作用下, 单圈常值涡旋运动等值线动力学的计算公式。用这些公式实施了四组计算, 结果与以往动力学分析和数值试验的结论定性一致, 数值也较为合理。

关键词: 涡旋, 非线性, 等值线动力学。

1 引 言

等值线动力学的研究内容, 是在动力学的框架内, 分析变量场等值线形状和范围的演变规律。等值线动力学系由著名物理学家, 孤立子理论的创始人 N. J. Zabusky 等^[1]提出。

文献[1]中, 用单圈闭合等值线代表一个涡旋, 计算时并引进常值涡旋假定, 即令闭合等值线内涡度值处处相同, 着重研究单圈常值涡旋等值线形状的变化。在大气科学领域, 变量场的特征等值线, 如 500 hPa 位势高度图上 588 dagpm 闭合等值线, 其形状、位置和范围的变化, 往往能够决定大尺度流型演变的主要特征。用动力学的方法分析这些特征等值线的变化机制, 是大气动力学的一个新的课题。

注意到文献[1]中出发方程是相对涡度守恒, 这一约束在地球大气大尺度涡旋运动过程中并不成立。本文从绝对涡度守恒出发, 推导出科氏力作用下涡旋运动等值线动力学的计算公式, 并做了试算, 得到了合理的结果。

2 出发方程和问题的提出

2.1 出发方程

取准地转正压涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中 ψ 为地转流函数, $\beta = df/dy$, f 为科氏参数, 取 β 平面中线处 $\varphi_0 = 20^\circ \text{N}$ 。令

$$\xi_a = \nabla^2 \psi + f \quad (2)$$

这里 ξ_a 为绝对涡度。式(1)改写为

$$\frac{d\xi_a}{dt} = 0 \quad (3)$$

* 1992 年 8 月 19 日收到原稿, 1992 年 11 月 18 日收到修改稿。国家八五科技攻关 85-906-07 资助项目。 22

式(3)描述了单位质量空气的微体元在运动过程中所遵循的约束, 即绝对涡度守恒。现考虑一张绝对涡度 ξ_a 的空间分布图。在该图上, 有一条绝对涡度为 ξ_{a1} 的光滑、闭合的等值线, 记为等值线 C 。在等值线 C 上, 有一单位质量的微体元, 记为微体元 A 。随着时间的推移, ξ_a 的空间分布会不断改变。但是, 由于式(3)的约束, 在整个演变过程中, 微体元 A 必须始终停留在等值线 C 上。初始时刻位于等值线 C 左(右)侧的微体元, 在演变过程中也必须留在等值线 C 的左(右)侧, 不得越过等值线 C 。

设初始时刻在等值线 C 上另有一个微体元 B 。微体元 A, B 之间的距离记为 $d(A, B)$, A, B 之间的曲线线段记为 $L(A, B)$ 。在演变过程中, 微体元 A, B 均需始终留在等值线 C 上。但是, 两者之间的距离 $d(A, B)$ 可以不断变化, 这就引起了曲线线段 $L(A, B)$ 长度和形状的变化。

再设初始时刻闭合等值线 C 以内有一个内接 M 边多边形, M 个顶点位于等值线 C 上。这里, M 是一个足够大的正整数。同样, 在演变过程中, 这 M 个顶点或称结点也必须始终留在等值线 C 上。令任意两个相邻结点之间的距离, 即多边形每条边的边长用 H_i 表示 ($i=1, 2, 3, \dots, M$)。显然, H_i 为时间的函数。 H_i 随时间的变化决定了 M 边多边形和等值线 C 形状的变化。如令等值线 C 以内绝对涡度处处相同, 均等于 ξ_{a0} , C 以外绝对涡度也处处相同且小于 ξ_{a0} , 可以认为, 等值线 C 大致代表一个常值涡旋的形状。 H_i 随时间的变化又可大致反映该常值涡旋形状的变化。

如果在等值线 C 的 M 个结点上, 沿东西向的速度分量 u_i 均大(小)于零, 则该常值涡旋又会向偏东(西)方向移动, 出现常值涡旋一边变形一边移动的现象。

2.2 问题的提出

$$\text{令} \quad f = f_0 + \beta y \quad (4)$$

式(4)代入式(2), 得

$$\nabla^2 \psi = F(x, y) \quad (5)$$

$$F(x, y) = \xi_a - f_0 - \beta y$$

式(5)为泊松方程。 $\psi(x, y)$ 可从下式求出:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} F(x', y') \ln r(x', y', x, y) d\sigma \quad (6)$$

式中 $\ln r$ 为问题的 Green 函数, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, Green 函数的物理含意是一个位于 (x', y') 的点源在 (x, y) 处产生的流; $d\sigma = dx' dy'$ 。

注意到

$$u(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (7)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

式(6)代入式(7)、(8), 得:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (F(x', y') \ln r) d\sigma \quad (9)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (F(x', y') \ln r) d\sigma \quad (10)$$

设在区域 σ 内, 有一条光滑、闭合的绝对涡度的等值线, 记为 Γ 。与一般的解析或数值的途径不同, 我们并不试图求出区域 σ 内所有坐标点上的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 。我们仅关心等值线 Γ 上各个坐标点的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 。也就是说, 在式(6)、(9)、(10)中, 自变元 x, y 的取值被限定在等值线 Γ 上。

在等值线 Γ 上任取一点 (x_k, y_k) , 若 $t=0$ 时 $u^{(0)}(x_k, y_k)$, $v^{(0)}(x_k, y_k)$ 已用式(9)、(10)求出, 则经过 Δt 后, 点 $(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})$ 处的微体元 k 将移到 $(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ 处, 这里,

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} + u^{(0)}(x_k, y_k) \Delta t \quad (11)$$

$$y_k^{(1)} = y_k^{(0)} + v^{(0)}(x_k, y_k) \Delta t \quad (12)$$

微体元 k 继续位于等值线 Γ 上。对于 $2\Delta t, 3\Delta t, \dots, N\Delta t$, 可用时间中央差或时间中央差-滤波公式代替式(11)、(12)。用上述途径可求出各个时刻闭合等值线 Γ 的形状和位置。

在式(9)、(10)中, $F(x, y)$ 含有三项, 即 ξ_a, f_0 及 $\beta y'$ 。如令 $f=0$, 则 $F(x, y)$ 仅含有一项, 这相应于文献[1]研究的问题。本文中令 $f \neq 0$, 故文献[1]研究的是本文的一个特例。

通过上述, 问题可以归结为: 如何用式(9)、(10)求出闭合等值线 Γ 上的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 。下面对此讨论。

3 科氏力作用下涡旋运动等值线动力学的公式推导

本节从式(9)、(10)出发, 推导科氏力作用下等值线动力学的计算公式。

为了避免一开始就处理十分复杂的问题, 文献[1]计算时用了单圈常值涡旋的假设, 即只有一条闭合等值线的涡旋, 等值线包围的区域内, 相对涡度处处相同。这是一个十分简化的理论模型, 本文亦作类似简化。随着工作的推进, 这个模型会逐渐完善。

$F(x, y)$ 的表达式代入式(9)、(10), 得

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (\xi_a - f_0 - \beta y') \ln r d\sigma \quad (13)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (\xi_a - f_0 - \beta y') \ln r d\sigma \quad (14)$$

记闭合等值线 Γ 包围的区域为 D , 区域以外为 \bar{D} 。积分区域 σ 分为两个部分, 即区域 D 和 \bar{D} 。在区域 D 内, 令 $\xi_a = \xi_{ac}$, ξ_{ac} 为常数; $\beta y'$ 项与 ξ_a 不同, $\beta y'$ 在涡旋的不同纬度取不同的值。这是本文与文献[1]的一个区别。我们要研究, $\beta y'$ 项在区域 D 内取值的变化这一 β 效应对涡旋的运动会有什么影响。由此引起了问题的复杂化。因为, 在常值涡旋的假定下, 文献[1]只需处理 $\frac{\partial}{\partial y} (\ln r)$ 和 $\frac{\partial}{\partial x} (\ln r)$ 项。而在这里, 由于 $\beta \neq 0$, 尚需处理 $\frac{\partial}{\partial y} (y' \ln r)$ 和 $\frac{\partial}{\partial x} (y' \ln r)$ 等项, 使问题显著复杂起来。作为研究工作的第一部分, 我们先分析涡旋区域 D 内 $\beta y'$ 项的作用; 在区域 \bar{D} , 令 $\xi = 0$ 。关于在区域 \bar{D} 内 $\beta y'$ 的作用,

我们已在另文^[2]做了进一步的讨论。

公式推导分三个部分, 现分别说明。

3.1 二维面积分化为线积分

不难看出, 式(13)、(14)右端的积分可归为以下三种类型:

$$I_1 = \iint_D \frac{\partial}{\partial y} \ln r dx' dy' \quad (15)$$

$$I_2 = \iint_D \frac{\partial}{\partial y} (y' \ln r) dx' dy' \quad (16)$$

$$I_3 = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (y' \ln r) dx' dy' \quad (17)$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln r = -\frac{\partial}{\partial y'} \ln r \quad (18)$$

并用格林公式, 得

$$I_1 = \oint_r \ln r dx' \quad (19)$$

积分 I_2 较复杂, 记式(16)中被积函数为 A , 令

$$A = A_a + A_b + A_c + A_d \quad (20)$$

其中

$$A_a = \frac{\partial}{\partial y} ((y' - y) \ln r), \quad A_b = \ln r + \frac{1}{2},$$

$$A_c = -\frac{1}{2}, \quad A_d = y \frac{\partial}{\partial y} \ln r$$

这样,

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} + I_{2c} + I_{2d} \quad (21)$$

其中

$$I_{2i} = \iint_D A_i dx' dy' \quad (i = a, b, c, d)$$

注意到

$$A_a = \frac{\partial}{\partial y'} ((y - y') \ln r)$$

用格林公式可得

$$I_{2a} = -\oint_r (y - y') \ln r dx'$$

可以证明

$$I_{2b} = -\frac{1}{2} \oint_r (y' - y) \ln r dx' + \frac{1}{2} \oint_r (x' - x) \ln r dy'$$

$$I_{2c} = \frac{1}{4} \oint_r y' dx' - \frac{1}{4} \oint_r x' dy'$$

$$I_{2d} = \oint_{\Gamma} y \ln r dx'$$

将 I_{2i} ($i = a, b, c, d$) 的表达式代入式(21), 整理后可得

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24} + I_{25} + I_{26} \quad (22)$$

式中

$$I_{21} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} y' \ln r dx', \quad I_{22} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x' \ln r dy'$$

$$I_{23} = \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} y' dx', \quad I_{24} = -\frac{1}{4} \oint_{\Gamma} x' dy'$$

$$I_{25} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} y \ln r dx', \quad I_{26} = -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x \ln r dy'$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}(y' \ln r) = -y' \frac{\partial}{\partial x'} \ln r$$

由式(17)可得

$$I_3 = - \oint_{\Gamma} y' \ln r dy' \quad (23)$$

在 I_1, I_2, I_3 的表达式(19)、(22)、(23)中, 积分是沿着闭合等值线 Γ 进行, 自变元为直角坐标系的 x', y' 。为了能付诸计算, 需变换自变元 (x', y') 。

3.2 自变元由 (x', y') 变换为 ζ 和空间离散化

图 1 a 中, 闭合等值线 Γ 被划分为 M 段圆弧。将 M 个结点相连得 M 边多边形。 Γ 上的结点即为 M 边多边形的顶点。等值线 Γ 用 M 边多边形的 M 条边, 即 M 根弦线近似代替。本文中, 令 $M=72$ 或 36 。在直角坐标 $x'oy'$ 和 xoy 中, ox, ox' 轴指向正东, oy, oy' 轴指向正北。 i_x 为 dx, dx' 的方向, i_y 为 dy, dy' 的方向。在等值线 Γ 上, 计有 j 个点 (x', y') , i 个点 (x, y) ($j=1, 2, 3, \dots, M; i=1, 2, 3, \dots, M$)。点 Q 的坐标为 (x_0, y_0) , 点 J, K 的坐标分别为 $J(x'_n, y'_n)$ 和 $K(x'_{n+1}, y'_{n+1})$ 。

如上所述, 沿等值线 Γ 的线积分近似地用沿 M 根弦线的连线的线积分来代替。现分析沿其中一根弦线 JK 上的线积分。在图 1 b 上, 设弦线 JK 的长度为 h_n , 点 $C(x', y')$ 代表 JK 上的任意一点, 记点 C 为动点。点 C 与点 J 之间的距离用 D_c 表示。弦线 JK 与 ox' 轴的交角为 θ_n , QJ 与 ox' 轴的交角为 ϕ_n 。 QJ, QK, QC 分别用 r_n, r_{n+1} 和 \tilde{r} 表示。在直角三角形 CJE 中, 令 $JE = \xi', CE = \eta'$ 。

在这些参数中, 一旦等值线 Γ 上的结点位置给定, $x'_n, y'_n, x'_{n+1}, y'_{n+1}, x_0, y_0$ 的取值即给定, 参数 $r_n, \theta_n, h_n, \phi_n$ 等亦给定。

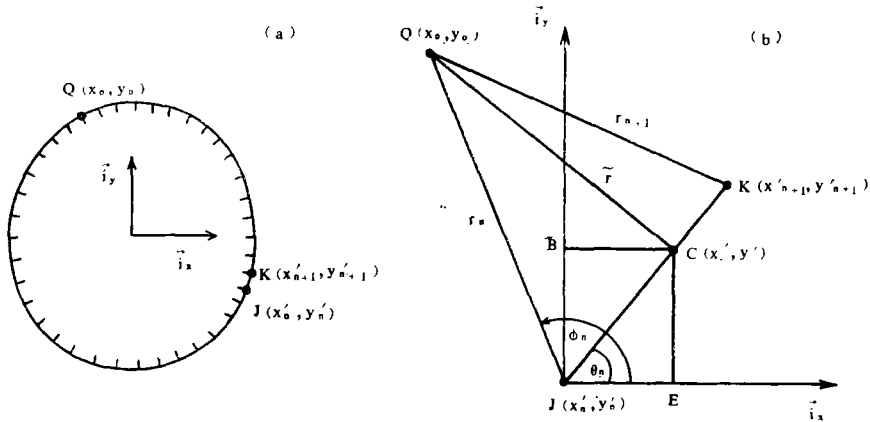
$$r_n = \sqrt{(x'_n - x_0)^2 + (y'_n - y_0)^2}$$

$$\theta_n = \arctg \frac{y'_{n+1} - y'_n}{x'_{n+1} - x'_n}$$

$$h_n = \frac{x'_{n+1} - x'_n}{\cos \theta_n}$$

再引进参数 μ_n , 这里, $\mu_n = \cos(\phi_n - \theta_n)$ 。

实际计算时, 先确定结点位置, 接着求出这些仅与结点位置有关的参数值。

图 1 等值线 Γ , 结点及参数示意图

另一方面, 参数 ξ', η', D_ξ 和 \tilde{r} 与结点和动点的位置有关。显然可见:

$$x' = x'_n + \xi' \quad (24)$$

$$y' = y'_n + \xi' \operatorname{tg} \theta_n \quad (25)$$

$$D_\xi = \xi' / \cos \theta_n \quad (26)$$

以 r_n 为长度单位去度量 D_ξ , 得到点 J 与点 C 之间距离的无量纲量 ξ :

$$\xi = \frac{\xi'}{r_n \cos \theta_n} \quad (27)$$

式(27)代入式(24)、(25), 得

$$x' = x'_n + r_n \cos \theta_n \xi \quad (28)$$

$$y' = y'_n + r_n \sin \theta_n \xi \quad (29)$$

\tilde{r} 通过下式与 ξ 建立联系

$$\tilde{r}^2 = r_n^2 (\xi^2 - 2\mu_n \xi + 1) \quad (30)$$

至此, 已在自变元 (x', y') 与变元 ξ 之间建立了关系式。这里, dx', dy' 分别指向正东正北方向, 而 $d\xi$ 沿着弦线 JK 的方向。相应地, 积分限亦需改变。由式(28)、(29)可见, 当 $x' = x'_n$ 或 $y' = y'_n$ 时, $\xi = 0$; 当 $x' = x'_{n+1}$ 或 $y' = y'_{n+1}$ 时, $\xi = k_n$, 这里 $k_n = h_n / r_n$ 。

将式(28)、(29)、(30)代入式(19)、(22)、(23), 可得以下空间离散的表达式:

$$I_1 = I_r(x) \quad (31)$$

$$I_{21} = \frac{1}{2} y'_n I_r(x) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M r_n^2 \sin \theta_n \cos \theta_n \int_0^{k_n} \xi \ln \{ r_n^2 (\xi^2 - 2\mu_n \xi + 1) \} d\xi \quad (32)$$

$$I_{22} = \frac{1}{2} x'_n I_r(y) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M r_n^2 \sin \theta_n \cos \theta_n \int_0^{k_n} \xi \ln \{ r_n^2 (\xi^2 - 2\mu_n \xi + 1) \} d\xi \quad (33)$$

$$I_{23} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M y'_n r_n \cos \theta_n \int_0^{k_n} d\xi + r_n^2 \sin \theta_n \cos \theta_n \int_0^{k_n} \xi d\xi \quad (34)$$

$$I_{24} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^M x'_n r_n \sin \theta_n \int_0^{k_n} d\xi + r_n^2 \sin \theta_n \cos \theta_n \int_0^{k_n} \xi d\xi \quad (35)$$

$$I_{25} = \frac{y}{2} I_r(x) \quad (36)$$

$$I_{26} = -\frac{x}{2} I_r(y) \quad (37)$$

$$I_3 = -y'_n I_r(y) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M r_n^2 \sin^2 \theta_n \int_0^{k_n} \xi \ln \{ r_n^2 (\xi^2 - 2\mu_n \xi + 1) \} d\xi \quad (38)$$

$$\text{式中 } I_r(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M r_n \cos \theta_n \int_0^{k_n} \ln \{ r_n^2 (\xi^2 - 2\mu_n \xi + 1) \} d\xi$$

$$I_r(y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M r_n \sin \theta_n \int_0^{k_n} \ln \{ r_n^2 (\xi^2 - 2\mu_n \xi + 1) \} d\xi$$

式(31)–(38)中,含有关于 ξ 的定积分。积分下限为零,积分上限为 $k_n = h_n/r_n$ 。当等值线 Γ 上结点位置和参数点 (x, y) 坐标给定后, k_n 亦给定。这些定积分的取值也可求出。将这些定积分求出后,即可得到可供实际计算的公式。

3.3 用于实际计算的公式

推导过程需较多篇幅,这里列出结果。

$$I_1 = \bar{I}_r(x) \quad (39)$$

$$I_{21} = \frac{1}{2} y'_n \bar{I}_r(x) + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^M \sin \theta_n \cos \theta_n K Q(n) \quad (40)$$

$$I_{22} = \frac{1}{2} x'_n \bar{I}_r(y) + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^M \sin \theta_n \cos \theta_n K Q(n) \quad (41)$$

$$I_{23} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M h_n \cos \theta_n \left(y'_n + \frac{1}{2} h_n \sin \theta_n \right) \quad (42)$$

$$I_{24} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^M h_n \sin \theta_n \left(x'_n + \frac{1}{2} h_n \cos \theta_n \right) \quad (43)$$

$$I_{25} = \frac{y}{2} \bar{I}_r(x) \quad (44)$$

$$I_{26} = -\frac{x}{2} \bar{I}_r(y) \quad (45)$$

$$I_3 = -y'_n \bar{I}_r(y) - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \sin^2 \theta_n K Q(n) \quad (46)$$

这里

$$\bar{I}_r(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M r_n \cos \theta_n k_n \Gamma Q(n)$$

$$\bar{I}_r(y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M r_n \sin \theta_n k_n \Gamma Q(n)$$

当 $j \neq 1, j \neq M$, 并且 $j \neq i-1, j \neq i$ 时, $\Gamma Q(n)$ 和 $KQ(n)$ 用以下公式计算:

$$\Gamma Q(n) = \ln r_n^2 - \mu_n k_n + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \mu_n^2\right) k_n^2 + \left(\frac{1}{2} \mu_n - \frac{2}{3} \mu_n^3\right) k_n^3 + O(k_n^4)$$

$$KQ(n) = h_n^2 \ln r_n^2 - h_n^2 - 2r_n \mu_n h_n + (h_n^2 + (1 - 2\mu_n^2)r_n^2) \times D_q(n) \\ + 4.0 \times r_n^2 \times \mu_n \times (1 - \mu_n) \times D_k(n)$$

$$D_q(n) = -2\mu_n k_n + (1 - 2\mu_n^2) k_n^2 + \frac{2}{3} \mu_n (3 - 4\mu_n^2) k_n^3 + O(k_n^4)$$

$$D_k(n) = k_n + \mu_n k_n^2 + \frac{1}{3} (4\mu_n^2 - 1) k_n^3 + O(k_n^4)$$

当 $j=1$ 或 $j=M$, 或 $j>1, j=i-1$, 或 $j>1, j=i$ 时, $\Gamma Q(n)$ 、 $KQ(n)$ 用以下公式计算:

$$\Gamma Q(n) = \frac{1}{2} (\ln h_n - 1)$$

$$KQ(n) = \frac{1}{2} h_n^2 (2 \ln h_n - 1)$$

用式(39)–(46), 可以求出式(15)、(16)、(17)中的 I_1, I_2 和 I_3 。代入式(13)、(14), 即可求出等值线 Γ 上各个结点的运动速度 $u(x_i, y_i)$ 和 $v(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3, \dots, M$), 进而可以求出各个结点未来的位置。时间积分时, 起步用前差, 以后用中央差加滤波方案, 即令

$$\tilde{x}_n^{(k)} = 0.1428 \times x_n^{(k-1)} + 0.4286 \times (\tilde{x}_n^{(k-1)} + x_n^{(k)})$$

$$\tilde{y}_n^{(k)} = 0.1428 \times y_n^{(k-1)} + 0.4286 \times (\tilde{y}_n^{(k-1)} + y_n^{(k)})$$

式中“ \sim ”代表滤波值。下标为结点标号, 上标为时间步长。随着积分时间的推移, 点 $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ 的位置不断地变化, 闭合等值线 Γ 的形状或位置也会不断变化。据此可以分析涡旋形态的演变或涡旋的移动。下面给出试算的结果。

4 计算结果

4.1 计算公式合用性的检验

令 $f=0$ 。这时, 本文研究的问题化为文献[1]的情况, 即相对于不旋转的静止坐标系。再令 $M=36, L=600 \text{ km}, V=40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 这里 L, V 分别为特征水平尺度和特征速度。闭合等值线 Γ 内, 相对涡度的无量纲量处处等于 $\xi_{\text{内}}$, 令 $\xi_{\text{内}}=1.0$, 相当于 $0.6667 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 等值线 Γ 外, 相对涡度为 $\xi_{\text{外}}$, 令 $\xi_{\text{外}}=0.0$ 。再设 $[\xi]=\xi_{\text{内}}-\xi_{\text{外}}$, 则 $[\xi]=1.0$ 。该常值涡旋呈椭圆形, 长轴 $L_x=2.0$, 短轴 $L_y=1.0$ 。时间步长 $\Delta t=0.025$, 相当于 6.25 min 。计算了 4500 个时步, 约 19.5 d 。

$t=0$ 时, 等值线 Γ 上点 M 位于正东方向(图 2a), 随着时间的增加, 点 M 按顺时针方向旋转, 这意味着涡旋绕轴顺时针旋转。 $t=37.5$ 时, 涡旋旋转超过 1 圈(图 2l)。 $t=112.5$ 时, 涡旋旋转已近 4 圈(图 2r)。

上述常值涡旋的旋转周期存在解析解^[1]:

$$T = \frac{2\pi}{[\xi]} \frac{(L_x + L_y)^2}{L_x \times L_y}$$

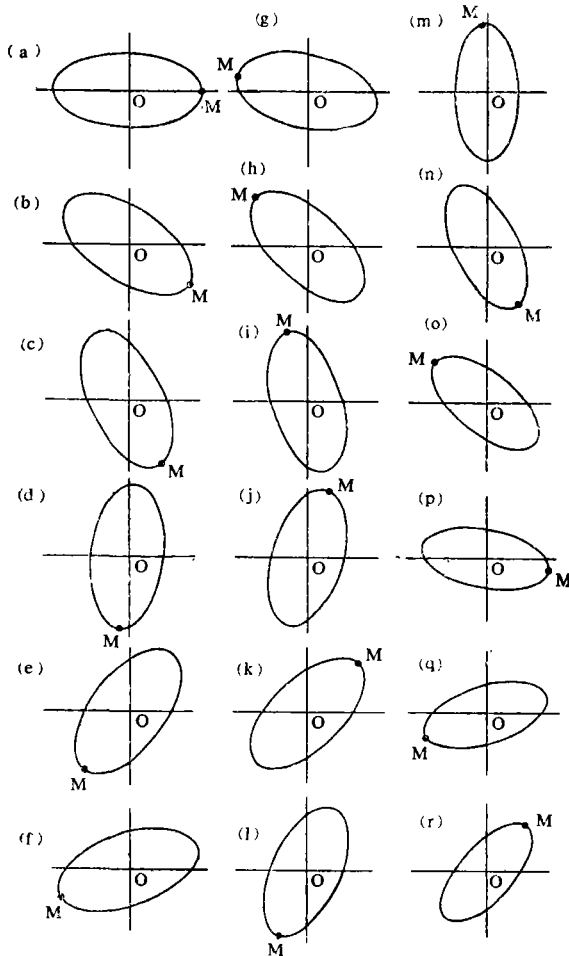


图 2 常值涡旋随时间的变化

(a) $t=0$, (b) $t=2.5$, (c) $t=5.0$, (d) $t=7.5$, (e) $t=10.0$,
 (f) $t=12.5$, (g) $t=15.0$, (h) $t=17.5$, (i) $t=20.0$, (j) $t=22.5$,
 (k) $t=25.0$, (l) $t=37.5$, (m) $t=50.0$, (n) $t=62.5$,
 (o) $t=75.0$, (p) $t=87.5$, (q) $t=100.0$, (r) $t=112.5$)

象图 2 那样维持原地,而是向偏西方向移动。表明 β 项在大尺度涡旋移行的过程中起着十分重要的作用。一般而言,在 β 项作用下台风涡旋总是向偏西方向移动,这里的结果是定性一致的。

4.2.2 涡旋移动的速度

随着涡旋半径的加大,移动速度加大。四组计算中,5 个模式日的平均移动速度分别为 33, 133, 280, 467 (km/d)。台风涡旋的空间尺度愈大,移动速度愈快^[3],移动速度大多在 2—3 个经度/d,两者结果有相似之处。

4.2.3 涡旋沿南北方向的移动

四组试验中,等值涡旋均具有向偏南方向移动的速度分量。Ohnishi^[4]把大尺度涡旋分为紧涡旋和松涡旋。前者在涡旋区域闭合等值线密集,后者闭合等值线疏松。本文等值涡旋仅有一根闭合等值线,属于最疏松的涡旋。文献[4]用动力学的方法分析,认为紧

以本文参数值代入后, $T = 28.274$, 即旋转 1 圈约需 4.9 d。涡旋中心的位置始终不变。

现将数值结果与解析结果比较。

$t = 25.0$ 即 4.4 个模式日时,计算值为 317° (图 2k),理论值为 318° ,相对误差 R 等于 0.3%。 $t = 50.0$ 即约 8.7 个模式日时,两者分别为 637° 和 629° , R 为 1.3%; $t = 75.0$ 即约 13.1 个模式日时,计算值、理论值及相对误差分别为 938° , 955° 和 1.7% (图 2m, 2o)。 $t = 100.0$ 即 17.4 个模式日时,它们分别为 1239° 、 1273° 和 2.7%。研究大尺度涡旋运动时,一般所取的时间尺度为 1—2 周。在这样的时间尺度内,这里的相对误差在 1%—2% 的范围内,已达到较高精度。同时,在长达 17 个模式日的积分中,涡旋中心的位置确实始终未移动。

4.2 β 项对涡旋运动的影响

在 $f \neq 0$ 的情况下,令 $\xi_a = 1.5$, $L_x = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$, $L_y = 0.45, 0.90, 1.35, 1.80$ 。积分 5 个模式日,时间步长 5 min。结果列于图 3。

由图 3 可见:

4.2.1 涡旋沿东西方向的移动

四组试验中,常值涡旋的中心不再

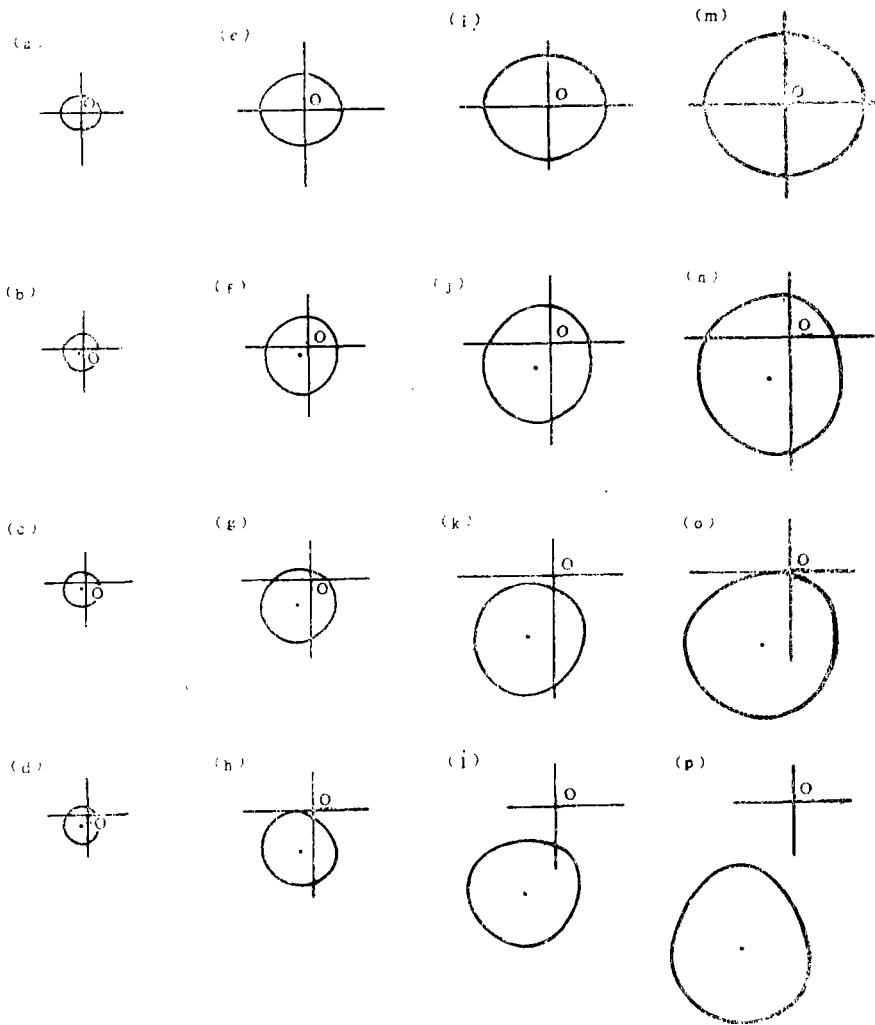


图 3 科氏力作用下，常值涡旋随时间的变化

(a-d) $L_x=0.50, L_y=0.45$; (e-h) $L_x=1.0, L_y=0.9$; (i-l) $L_x=1.50, L_y=1.35$; (m-p) $L_x=2.0, L_y=1.8$; a, e, i, m $t=0$; b, f, j, n $t=1d$; c, g, k, o $t=3d$; d, h, l, p $t=5d$

涡旋向偏北方向移动，松涡旋向偏南方向移动。在数值试验中也有类似现象出现^[5]。这里得到了与之相似的结果。

5 结果与讨论

在非线性的框架内研究大气动力学的问题，已经形成了若干有用的方法。如经约化摄动将正压涡度方程化为 KdV 方程等可以求解析解的一类方程；经低谱途径化为非线性的自治系统等。这些方法不可避免地要引进种种简化。丑纪范^[6]曾提出过简化必须遵循的准则。目前，一方面需要完善已有的方法，包括继续考察是否满足简化的准则等。另一方面需要探索新的途径。这些完善和探索将有助于大气动力学的发展。

在实际气象业务中，查阅变量场空间分布时，一般着重分析主要的信息。如查阅 500hPa

hPa 位势高度图时,普遍认为,588 dagpm 闭合等值线以内诸格点取值的差异,以及 588 与 584 线之间区域诸格点取值的差异等,均非十分重要(次要信息),重要的是 588 dagpm 等值线和其它特征等值线的形状和范围(主要信息)。我们考虑,等值线动力学舍弃次要信息,抓住主要信息的思路,与上述实际业务的简化思路一致,是处理非线性问题的一条新的途径,可能具有一定的应用前景。因而,本文将相对涡度守恒范畴内的等值线动力学^[1],推广到科氏力作用下涡旋运动的等值线动力学,推导出相应的计算公式,初步试算的结果尚属合理。

在约化摄动和低谱途径中,尚存在一些问题有待研究。等值线动力学的情况也是如此。与之相连的是本文的局限性。显然,单圈涡旋过于简单,属于十分理想的理论模型。科氏力的引进方面也有需要进一步完善之处等。这些都应继续分析。关于多圈涡旋等值线动力学的问题,我们将在另一文^[2]中讨论。

参考文献

- [1] Zabusky N J, et al. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions. *J Computational Physics*. 1979, 30:96-106.
- [2] 罗哲贤. 多圈涡旋等值线动力学的研究. 已投“气象学报”, 1992.
- [3] Chan J C L, Williams R T. Analytical and numerical studies of beta-effect in tropical cyclone motion. Part I. *J Atmos Sci*, 1987, 44:1257-1264.
- [4] Ohnishi H. A study on the tropical cyclone motion caused by its asymmetric structure, Collected papers issued at the Conference of Meteorological Research Institute, 1989, 38-50.
- [5] 罗哲贤. 能量频散对台风结构和移动的作用, 已投“气象学报”, 1992.
- [6] 丑纪范. 初始场作用的衰减与算子的特征. *气象学报*. 1983, 41:385-392.

CONTOUR DYNAMICS FOR VORTEX MOTION INFLUENCED BY THE CORIOLIS FORCE

Luo Zhexian

(*Nanjing Institute of Meteorology, 210044*)

Abstract

The computational formulas for vortex motion influenced by the Coriolis force in the framework of Contour Dynamics are given, by which four numerical computations are performed, and the result prove their validity.

Key words: Vortex, Nonlinearity, Contour dynamics.