

长时效的正压原始方程能量完全守恒(拟)谱模式*

钟 青

(中国科学院大气物理所, 北京, 100080)

提 要

遵循误差反演补偿新计算原理,对正压原始方程传统气象全球拟谱模式方案进行了改造,构造了正压原始方程能量完全守恒全球拟谱模式新计算方案,解决了正压原始方程的(非线性)计算稳定性问题和能量守恒整体性质保持问题,改进了相应正压原始方程传统气象全球拟谱模式方案的计算效能。新方案的数值试验表明:在计算实践上,新方案在解决能量守恒问题的同时,可解决(非线性)计算稳定性问题,并在一定条件下可解决非线性计算收敛性问题。进一步的比较数值试验还表明:在计算实践上,新方案具有在提高相应传统气象方案的计算精度,减少其计算量的同时,延长其计算时效,解决其中一类特定“气候漂移”问题方面的效用。

本工作原理也适用于斜压原始方程情形。

关键词: 非线性计算不稳定, 非线性计算收敛, 完全能量守恒谱方案, 长时效, 气候漂移。

1 引 言

非线性计算稳定性与非线性计算收敛性问题一直是计算数学界与计算物理界致力解决的非线性计算基本问题,离散系统保持原系统特征性质问题也是离散计算基本问题之一。近来的工作^[1-6]在某些类数学物理问题的某些计算基本问题上不断有所进步和突破。

国外的一些工作已能构造某些瞬时(加权)平方守恒计算格式^[7-9]。曾庆存和张学洪^[1](1981)提出“瞬时线性化”方法,找到了实现克兰克-尼科尔森隐式完全平方守恒方案的一种途径。王斌和季仲贞(1990)提出采用加可调耗散的方式可构造显式完全平方守恒计算方案,从而建立了显式平方守恒格式构造理论,并具体实现了时空差分显式平方守恒格式。以上方案均采用将发展问题控制方程变换成某种特定形式,然后才可加以离散构造的思路。由于实际工作中应用此方法技术上的困难,也由于计算格式的好坏与其相应的控制方程在何种表达形式下离散有密切关系,更由于并非重要的发展问题控制方程如斜压原始方程均可变换为特定形式,故此法有局限。钟青(1991,1992)先后解决了完全(二次)平方守恒半隐式方案构造问题与在发展问题控制方程的任意表述形式下直接离散构造半隐式、显式和隐式完全平方守恒计算格式问题;更为重要的是还发现直接法构造的二次完全平方守恒计算方案格式具有同时解决非线性计算稳定性与非线性计算收敛性两个前述

* 1992年3月23日收到原稿,1992年9月14日收到最后修改稿。该文得到国家科技攻关 75-09-01,85-906-03, 04 以及 91-92 中科院大气物理研究所所长基金项目部分资助。

离散计算基本问题,以及经济计算格式问题方面的效用^[3-5];又进一步提出保真计算格式概念,建立了可以适用于发展问题任意特征性质保持的任意阶时间差分精度保真计算格式一般补偿构造原理和方法,且应用该补偿保真计算理论,分别具体构造实现了关于(加权)平方或非平方整体守恒性质的相应时间差分-空间拟谱展开保真方案^[6]

本文遵循误差反演补偿新计算原理^[6],改造了一传统气象(拟)谱模式,实现了能量完全守恒(拟)谱模式,解决了相应非线性计算稳定性问题和能量守恒特征性质的保持问题;并试图展示能量完全守恒类(拟)谱模式在改进相应传统方案计算效能,解决诸如“气候漂移”问题,延长计算时效问题,提高计算精度问题,建立经济计算格式问题上的巨大潜力。本文工作遵循的误差反演补偿新计算原理和相应方法还可推广应用于正压原始方程其它特征性质保持问题与斜压原始方程情形。

2 控制方程(组)

描述具有自由表面的均匀不可压缩地球流体运动的正压原始(“浅水”)方程为

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -f\vec{k} \times \vec{V} - \nabla\Phi \quad (1a, b)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi\nabla \cdot \vec{V} \quad (1c)$$

其中 \vec{V} 是水平风矢量,分别具有向东与向北的速度分量 u 和 v , Φ 是自由表面的位势高度, f 是科里奥利参数, \vec{k} 是垂直单位矢量, ∇ 是水平梯度算子, d/dt 是时间全导数。

在地球球面坐标系里,式(1a,b,c)一等价变换形式为:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a\cos^2\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} [U(\nabla^2\psi + f)] + \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\mu} [V(\nabla^2\psi + f)] \right\} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} = & \frac{1}{a\cos^2\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} [V(\nabla^2\psi + f)] - \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\mu} [U(\nabla^2\psi + f)] \right\} \\ & - \nabla^2 \left[\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \Phi' \right] \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = -\frac{1}{a\cos^2\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} (U\Phi') + \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial\mu} (V\Phi') \right] - \Phi D \quad (2c)$$

其中,独立自变量 λ, φ 和 t 分别为经度、纬度和时间; $\mu = \sin\varphi$; a 是地球半径; $\zeta = \nabla^2\psi$ 为相对涡度的垂直分量, $D = \nabla^2\chi$ 为水平散度, Φ 为不依赖于时间的全球平均位势场, Φ' 为时变的扰动位势场, $\Phi = \Phi' + \bar{\Phi}$, ψ 和 χ 分别为流函数与速度势;变量 U, V 满足

$$U = -\frac{\cos^2\varphi}{a} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial\chi}{\partial\lambda} \quad (3a)$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{\cos^2\varphi}{a} \frac{\partial\chi}{\partial\mu} \quad (3b)$$

方程组(1a,b,c)或(2a,b,c)具有拟能、能量、角动量和质量守恒整体性质如下

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\zeta + f)^2}{\Phi} 4\pi a^2 \cos\varphi d\lambda d\varphi = \text{常量} \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\Phi + \frac{1}{2}\Phi'^2 \right] 4\pi a^2 \cos\varphi d\lambda d\varphi = \text{常量} \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a(u \cos \varphi + \Omega \cos^2 \varphi) 4\pi a^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = \text{常量} \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi' 4\pi a^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = \text{常量} \tag{7}$$

对于正压无辐散运动($D=0$),其控制方程简化为(2a),相应能量与能量守恒整体性质分别简化为

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \zeta^2 4\pi a^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = \text{常量} \tag{8}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) 4\pi a^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = \text{常量} \tag{9}$$

并且 Rossby-Haurwitz 波此时是式(2a)的准确解,它也是有辐散正压原始方程组的近似解。

正压原始方程能够描写层结效应并非决定性因子的大气和海洋运动的重要特征^[10]。

3 传统气象(拟)谱模式

正压原始运动方程传统气象(拟)谱半隐式模式^[11]

$$\frac{\zeta_{lm}^{n+1} - \zeta_{lm}^{n-1}}{2\Delta t} = F\zeta_{lm}^n \tag{10a}$$

$$\frac{D_{lm}^{n+1} - D_{lm}^{n-1}}{2\Delta t} = FD_{lm}^n + \frac{l(l+1)}{2a^2} (\Phi'_{lm}^{n+1} + \Phi'_{lm}^{n-1}) \tag{10b}$$

$$\frac{\Phi'_{lm}^{n+1} - \Phi'_{lm}^{n-1}}{2\Delta t} = F\Phi'_{lm}^n - \bar{\Phi} \frac{D_{lm}^{n+1} + D_{lm}^{n-1}}{2} \tag{10c}$$

其中, $F\zeta, FD$ 和 $F\Phi$ 分别为非线性项

$$F\zeta = -\frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [U(\nabla^2 \psi + f)] + \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \mu} [V(\nabla^2 \psi + f)] \right\} \tag{11a}$$

$$FD = \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [V(\nabla^2 \psi + f)] - \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \mu} [U(\nabla^2 \psi + f)] \right\} - \nabla^2 \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)} \tag{11b}$$

$$F\Phi = -\frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (U\Phi') + \cos^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \mu} (V\Phi') \right] \tag{11c}$$

这里, X_{lm}^n 表示为变量 X 在 n 时刻以球谐系数 $P_l^n(\mu)e^{im\lambda}$ 为基函数拟谱截断展开后的相应谱系数。其中, X 泛指变量 $\zeta, D, \Phi', F\zeta, FD, F\Phi$ 中的任意一个变量。这里的非线性项的谱系数是通过谱变换方法^[12]确定的。

4 能量完全守恒(拟)谱模式

遵循误差补偿思想,正压原始方程能量完全守恒(拟)谱模式可构造如下:

$$\frac{\zeta_{lm}^{n+1} - \zeta_{lm}^n}{\Delta t} = F\zeta_{lm}^n + \epsilon^n B\zeta_{lm}^n \tag{12a}$$

$$\frac{D_{lm}^{n+1} - D_{lm}^n}{\Delta t} = FD_{lm}^n + \frac{l(l+1)}{a^2} \Phi_{lm}^{n+1} + \epsilon^n BD_{lm}^n \quad (12b)$$

$$\frac{\Phi_{lm}^{n+1} - \Phi_{lm}^n}{\Delta t} = F\Phi_{lm}^n - \Phi D_{lm}^{n+1} + \epsilon^n B\Phi_{lm}^n \quad (12c)$$

这里,式(12a,b,c)还可等价写为

$$X_{lm}^{n+1} = \tilde{X}_{lm} + \epsilon^n \tilde{\tilde{X}}_{lm} \quad (13)$$

误差补偿算子 BX 可取为

$$BX = \frac{X'' - 2X' + X}{2\Delta t} \quad (14)$$

$\tilde{X}_{lm}, \tilde{\tilde{X}}_{lm}$ 可通过将式(12a,b,c)恒等变形确定, X', X'' 可通过取 $\epsilon^n = 0$, 以 X^n 为初值将式(12a,b,c)分别以 Δt 为步长向前积分一步和二步获得。

对于正压有辐散情形,以保持原问题能量(加权平方)守恒性质为原则,误差补偿系数 ϵ^n 可解析确定如下

$$\epsilon^n \begin{cases} = -\frac{b}{3a} + \sqrt{-\frac{q}{2} + \Delta^{1/2}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \Delta^{1/2}}, & \Delta > 0 \\ = -\frac{b}{3a} + 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2} \cos\theta, & \Delta \leq 0, |\cos\theta| \leq |\cos(\theta + 120^\circ)|, \\ & |\cos\theta| \leq |\cos(\theta + 240^\circ)| \\ = -\frac{b}{3a} + 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2} \cos(\theta + 120^\circ), & \Delta \leq 0, |\cos(\theta + 120^\circ)| \leq |\cos\theta|, \\ & |\cos(\theta + 120^\circ)| \leq |\cos(\theta + 240^\circ)| \\ = -\frac{b}{3a} + 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2} \cos(\theta + 240^\circ); & \Delta \leq 0, |\cos(\theta + 240^\circ)| \leq |\cos\theta|, \\ & |\cos(\theta + 240^\circ)| \leq |\cos(\theta + 120^\circ)| \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad (16)$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad (17)$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (18)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{1}{2}q\left(-\frac{p}{3}\right)^{-3/2}\right) \quad (19)$$

$$a = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \frac{\tilde{U}_{i,j}^2 + \tilde{V}_{i,j}^2}{2(1-\mu_j^2)} \tilde{\Phi}_{i,j} G_j^{(K_2)} \quad (20)$$

$$b = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \left[\frac{\tilde{U}_{i,j}^2 + \tilde{V}_{i,j}^2}{2(1-\mu_j^2)} (\Phi + \tilde{\Phi}_{i,j}) + \frac{\tilde{U}_{i,j}\tilde{U}_{i,j} + \tilde{V}_{i,j}\tilde{V}_{i,j}}{(1-\mu_j^2)} \tilde{\Phi}_{i,j} + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{i,j}^2 \right] G_j^{(K_2)} \quad (21)$$

$$c = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \left[\frac{\tilde{U}_{i,j} \tilde{U}_{i,j} + \tilde{V}_{i,j} \tilde{V}_{i,j}}{1 - \mu_j^2} (\Phi + \tilde{\Phi}_{i,j}) + \frac{\tilde{U}_{i,j}^2 + \tilde{V}_{i,j}^2}{2(1 - \mu_j^2)} \tilde{\Phi}_{i,j} + \tilde{\Phi}_{i,j} \tilde{\Phi}_{i,j} \right] G_j^{(K_2)} \quad (22)$$

$$d = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \left[\frac{\tilde{U}_{i,j}^2 + \tilde{V}_{i,j}^2}{2(1 - \mu_j^2)} (\Phi + \tilde{\Phi}_{i,j}) + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{i,j}^2 \right] G_j^{(K_2)} - E_0 \quad (23)$$

$$E_0 = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \left[\frac{U_{0i,j}^2 + V_{0i,j}^2}{2(1 - \mu_j^2)} (\Phi + \Phi_{0i,j}) + \frac{1}{2} \Phi_{0i,j}^2 \right] G_j^{(K_2)} \quad (24)$$

$$x_{i,j} = \sum_{m=-m}^m \sum_{l=|m|}^{L(m)} x_{lm} p_l^m(\mu_j) e^{im\lambda_i} \quad (25)$$

这里 $x_{i,j} = \tilde{\Phi}_{i,j}, \tilde{\Phi}_{i,j}, x_{lm} = \tilde{\Phi}_{lm}, \tilde{\Phi}_{lm}$;

$$\{Y_{i,j}, Z_{i,j}\} = -a \sum_{m=-m}^m \sum_{l=|m|}^{L(m)} \left\{ \frac{im}{l(l+1)} Y_{lm} P_l^m(\mu_j) - \frac{1}{l(l+1)} (1 - \mu_j^2) Z_{lm} \frac{d p_l^m(\mu_j)}{d \mu_j}, \right. \\ \left. \frac{im}{l(l+1)} Y_{lm} P_l^m(\mu_j) + \frac{1}{l(l+1)} (1 - \mu_j^2) Y_{lm} \frac{d p_l^m(\mu_j)}{d \mu_j} \right\} e^{im\lambda_i} \quad (26)$$

这里 $\{Y_{i,j}, Z_{i,j}\} = \{\tilde{U}_{i,j}, \tilde{V}_{i,j}\}, \{\tilde{U}_{i,j}, \tilde{V}_{i,j}\}; \{Y_{lm}, Z_{lm}\} = \{\tilde{D}_{lm}, \tilde{\zeta}_{lm}\}, \{\tilde{D}_{lm}, \tilde{\zeta}_{lm}\}$ 。因子 Φ 的物理意义要求有

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi \geq 0 \quad (27)$$

因此,不妨在实际计算中以其绝对值代替此量。可以验证,此时计算格式(12)是加权平方能量完全守恒格式。

对于正压无辐散情形,以保持原问题能量(平方)守恒性质为原则,误差补偿系数 ϵ^n 可解析确定如下:

$$\epsilon^n = -\frac{C_2}{C_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{C_3 C_1}{C_2^2}} \right) \quad (28)$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} G_j^{(K_2)} \frac{\tilde{U}_{i,j}^2 + \tilde{V}_{i,j}^2}{2(1 - \mu_j^2)} \quad (29)$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} G_j^{(K_2)} \frac{\tilde{U}_{i,j} \tilde{U}_{i,j}^2 + \tilde{V}_{i,j} \tilde{V}_{i,j}^2}{2(1 - \mu_j^2)} \quad (30)$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} G_j^{(K_2)} \frac{\tilde{U}_{i,j}^2 + \tilde{V}_{i,j}^2 - U_{0i,j}^2 - V_{0i,j}^2}{2(1 - \mu_j^2)} \quad (31)$$

可以验证,此时计算格式(12)是平方能量完全守恒格式。这里

$$G_j^{(K_2)} = \frac{2(1 - \mu_j^2)}{[K_2 P_{K_2-1}(\mu_j)]^2} \quad (32)$$

本节诸式中的 $G_j^{(K_2)}$ 均为高斯权重因子, $X_{0i,j}$ 均为变量 $X (X = \{U, V, \Phi\})$ 在计算格点 (i, j) 上的初值。可以验证,此时计算格式(12)是平方能量完全守恒格式。

显而易见,无论是作为加权平方能量完全守恒还是作为平方能量完全守恒计算格式(12)都是稳定的计算格式,可解决正压原始方程的非线性计算稳定性。

5 数值试验

在 Phillips 1959年的工作^[13]之后, Rossby-Haurwitz 波已经成为检验关于正压原始方程计算格式的常识性方法。这主要是由于 Rossby-Haurwitz 波不仅具有明确的气象学上的意义, 而且还是非线性的正压无辐散原始方程的准确解, 以及大尺度正压有辐散运动的近似解。

本文中 Rossby-Haurwitz 波数值试验的初值条件具体如下: 无辐散的初始速度场($D=0$)由流函数

$$\psi_0 = -a^2 A_0 \sin\varphi + a^2 A_1 \cos^{m_0}\varphi \sin\varphi \cos m_0\lambda \tag{33}$$

确定(见图1), 位势场 Φ_0 取为

$$\Phi_0 = \bar{\Phi} + a^2 A(\varphi) + a^2 B(\varphi) \cos m_0\lambda + a^2 C(\varphi) \cos 2m_0\lambda \tag{34}$$

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} A_0 (2\Omega + A_0) \cos^2\varphi + \frac{1}{4} A_1^2 \cos^{2m_0}\varphi [(m_0 + 1) \cos^2\varphi + (2m_0^2 - m_0 - 2) - 2m_0^2 \cos^{-2}\varphi] \tag{35}$$

$$B(\varphi) = \frac{2(\Omega + A_0) A_1}{(m_0 + 1)(m_0 + 2)} \cos^{m_0}\varphi [(m_0^2 + 2m_0 + 2) - (m_0 + 1)^2 \cos^2\varphi] \tag{36}$$

$$C(\varphi) = \frac{1}{4} A_1^2 \cos^{2m_0}\varphi [(m_0 + 1) \cos^2\varphi - (m_0 + 2)] \tag{37}$$

在本文实际计算中, 地球球面上选取经向 $K_1=32$ 个等距格点, 纬向 $K_2=26$ 个不等距高斯格点。这是为了尽可能提高经圈积分离散求和近似表示的精度。球谐函数展开采用菱形截谱方法, 最大截断波数为11。其它有关参数分别取为 $A_0=A_1=3.924 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$, $m_0=4$, $a=6371 \times 10^6 \text{m}$, $\bar{\Phi}=7.84 \times 10^4 \text{m}$, $\Omega=7.29 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ 。传统方案(10a, b, c)采用的是一种传统的半步长起步方法, 也就是令 $t=\Delta t/2$ 时刻计算初条件与 $t=0$ 时刻计算初条件相同, 以半时间步长 $\Delta t/2$ 起步积分一次, 然后以正常时间步长 Δt 积分下去。此外, 本文所有的数值试验均是在 Convex-1型数字计算机上进行的。这些模式的数值计算在主程序中均采用单精度(7位有效数字), 子程序中采用双精度。

以式(33—34)为物理初条件, 对于一般情形下(有辐散)的正压原始方程传统格式

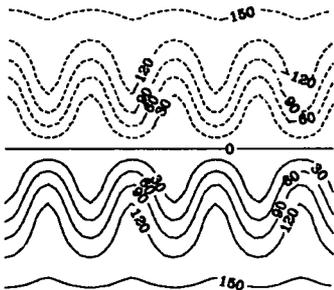


图1 Rossby-Haurwitz 波初始流场图

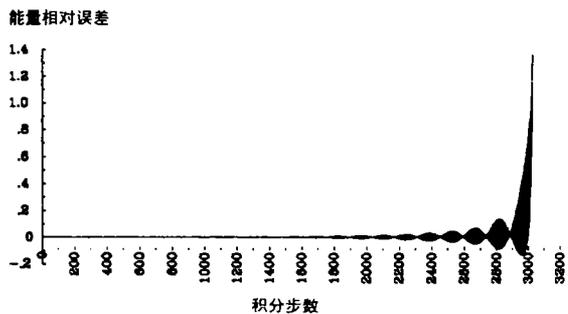


图2 能量全球积分相对误差-积分时间关系曲线 (积分时间=189d, 积分步长=90min, 正压原始方程传统半隐式拟谱模式)

(10a-c)与能量守恒(12a-c)的数值积分试验显示：传统半隐式格式中，存在一类“气候漂移”问题，表现为，存在一时间积分临界步长(约为100min)，当时间步长小于临界值时，虽可保持质量守恒性质，但能量、拟能和角动量积分守恒量的相对误差均呈现从振荡变化一对称振荡增长—迅速单调正增长(非线性计算失稳)规律，且不能通过减小时间步长改变此规律(试验范围：时间步长>10min)，其稳定积分时间不到190d(参见图2)。当时间步长大于此临界值时，其原守恒性质的相对误差迅速呈现单调正增长(非线性计算失稳)，其稳定积分时间远远小于190d。

半隐式能量“加权”平方守恒性质保真格式的稳定积分时间远在190d 以上，稳定积分时间步长远大于相应传统半隐式格式时间积分临界步长(约为100min)，可达6h。此时，其稳定积分时间可以达到800d 以上，并且可以保持能量守恒性质(5)与质量守恒性质(7)(见图3a, b)。此外，同样的数值积分试验显示：相应显式能量加权平方守恒性质保真格式的最大稳定积分时间步长仅约为15min，这表明：半隐式守恒格式与相应显式守恒格式相比较可极大地减少计算量。

由于 Rossby-Haurwitz 波式(33)，仅是有辐散正压原始方程(1a-c)的近似解，因此对于稳定的数值积分，无法根据其波型变化与否确切判断有关计算格式的优劣。虽然，通过该项积分可在一定程度上检验有关计算格式的基本性能。为确切考察能量守恒格式的性能，并鉴于 Rossby-Haurwitz 波式(33)是无辐散正压原始方程(1a)的准确解，可以为检

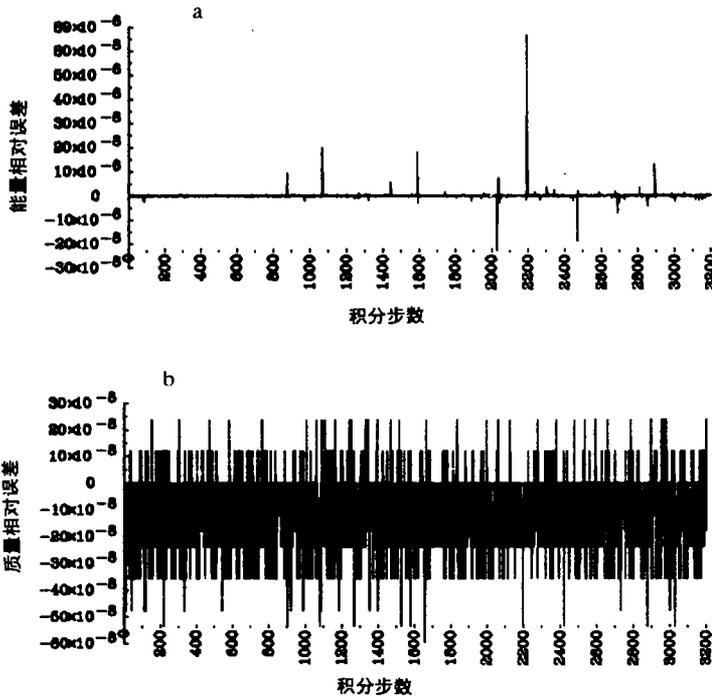


图3 能量(a)及质量(b)全球积分相对误差-积分时间关系曲线
(积分时间=800d, 积分步长=6h, 正压原始方程保真半隐式拟谱模式)

验该方程有关数值计算格式的性能提供一个客观的标准,本工作利用 Rossby-Haurwitz 波式(33)对传统气象与新型能量守恒的正压无辐散原始方程全球(拟)谱模式(10a)和(12a)进行了进一步的数值积分检验.试验显示:类似于有辐散情形,存在一类“气候漂移”问题,表现为,存在一时间积分临界步长(约为320min),当时间步长小于临界值时,动能和拟能全球积分守恒量的相对误差均呈现从振荡变化—对称振荡增长—单调正增长(非线性计算失稳)规律(参见表1与图4a, b),其波型基本保持时间约为60d(<70d)(参见图5a, b),不能通过减小时间步长改变此规律以及延长此计算“时效”,仅能减小误差振荡变化阶段的振幅,若令此误差初始振荡振幅减至计算机舍入误差水平(千万分之几),步长值需降至3min以下;此外,当时间步长大于此临界值时,其守恒性质的相对误差迅速呈现单

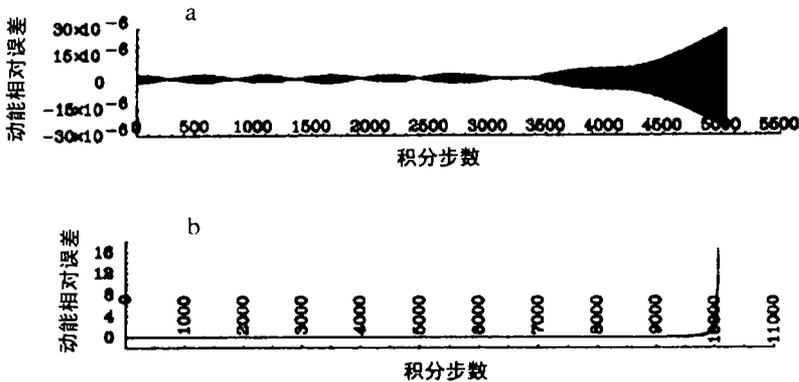


图4 全球动能积分相对误差-积分时间关系曲线
 (无辐散正压原始方程传统显式拟谱模式,积分步长=10min.
 a. 积分时间=35d; b. 积分时间=70d)

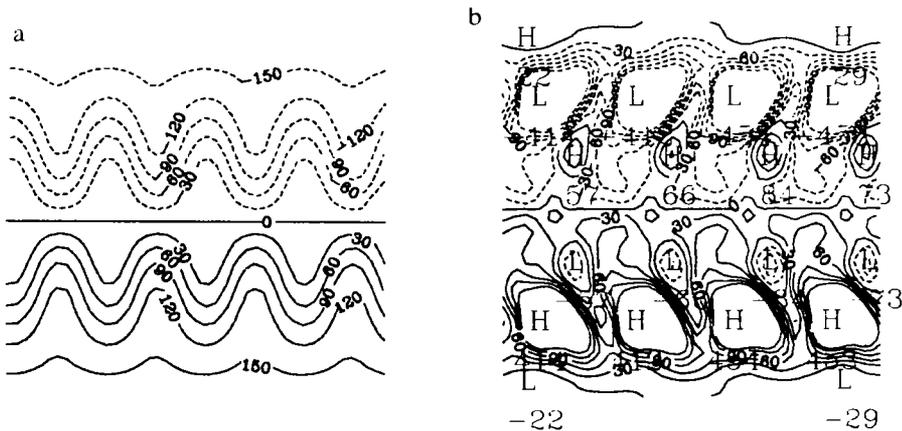


图5 流场图

(a. 积分时间=60d; b. 积分时间=70d.积分步长=10min,无辐散正压原始方程传统显式拟谱模式)

表1 传统拟谱显式格式总动能和总拟能演变
(积分步长10min, 7位有效数字, 无辐散正压原始方程)

d	总动能(m ² /s)	总拟能(m ² /s)
0	0.1220760 E+05	0.8847784 E-08
30	0.1220771 E+05	0.8847945 E-08
35	0.1220796 E+05	0.8848321 E-08
40	0.1220877 E+05	0.8849525 E-08
45	0.1221150 E+05	0.8853549 E-08
50	0.1222102 E+05	0.8867624 E-08
55	0.1225634 E+05	0.8919797 E-08
60	0.1241432 E+05	0.9152241 E-08
65	0.1348819 E+05	0.1071767 E-08
70	0.2136956 E+05	0.9839725 E-08
100	计算溢出	计算溢出

表2 动能保真拟谱显式计算格式总动能和总拟能演变
(积分步长3h, 7位有效数字, 无辐散正压原始方程)

d	总动能(m ² /s)	总拟能(m ² /s)
0	0.12207602 E+05	0.8847784 E-08
30	0.12207600 E+05	0.8847788 E-08
35	0.12207602 E+05	0.8847789 E-08
40	0.12207602 E+05	0.8847784 E-08
45	0.12207601 E+05	0.8847786 E-08
50	0.12207601 E+05	0.8847789 E-08
55	0.12207602 E+05	0.8847784 E-08
60	0.12207604 E+05	0.8847788 E-08
65	0.12207602 E+05	0.8847786 E-08
70	0.12207604 E+05	0.8847784 E-08
75	0.12207600 E+05	0.8847784 E-08
80	0.12207601 E+05	0.8847789 E-08
85	0.12207601 E+05	0.8847786 E-08
90	0.12207604 E+05	0.8847788 E-08
95	0.12207601 E+05	0.8847791 E-08
100	0.12207600 E+05	0.8847792 E-08

调正增长(非线性计算失稳), 其波型基本保持时间远小于60d。

新型动能平方守恒性质保真格式关于 Rossby-Haurwitz 波准确解(33)的数值积分模拟试验显示: 动能保真格式可在计算机舍入误差水平上同时保持动能和拟能守恒性质(参见表2与图6a, b), 从而完全解决非线性计算稳定性问题, 且在比传统气象计算方案计算“时效”长得多的积分时间(90d)(比较图5a, b与图7a)内, 在计算机舍入误差水平上, 解决非线性计算收敛性问题(参见表2, 图7a并比较图1与图7a), 从而在一定条件下解决“气候漂移”问题(参见并比较图1, 图6a, 6b, 7a, 7b与图4a, 4b, 5a, 5b; 表2与表1)。但非线性计算稳定性问题与非线性计算收敛性问题并无等价性(见图6—7)。与传统气象计算方案比较,

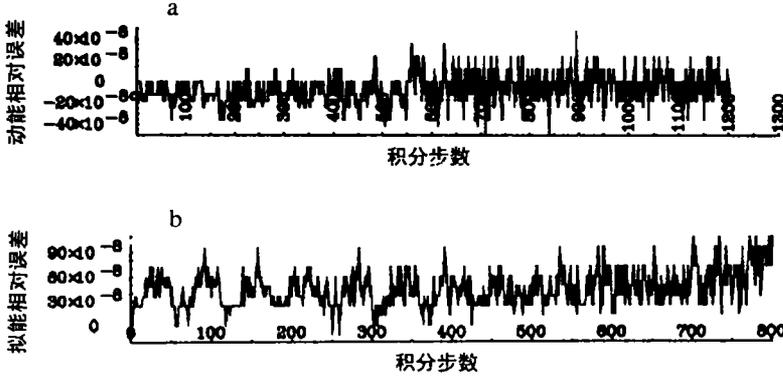


图6 动、拟能全球积分相对误差-积分时间关系曲线
 (a. 动能, 积分时间=150d; b. 拟能, 积分时间=100d. 积分步长为3h,
 无辐散正压原始方程动能保真显式拟谱模式)

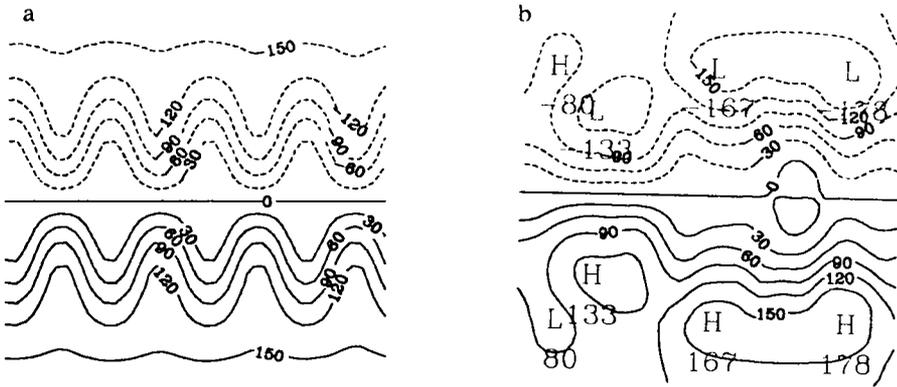


图7 流场图

(a. 积分时间=90d, b. 积分时间=150d. 积分步长=3h, 无辐散正压原始方程动能保真显式拟谱模式)

动能守恒性质保真格式还可在大大减小其计算量, 提高其计算精度的同时, 大幅度地延长其计算“时效”(比较表1、图4—5与表2、图6—7)。其可用收敛积分步长可达57h。

6 总结与讨论

离散计算误差的引入是造成离散计算的若干基本问题的根本原因。因此, 如果可以按照离散计算误差引入的来源与方式加以完全准确地消除, 就可以完全准确地离散计算。本工作是采用在相应正压原始方程传统(拟)谱模式的每一个计算谱分量(格点)上, 按照其时间离散误差引入的方式, 以保持原问题能量守恒整体性质为原则, 加以相应的平均的消除的构造方法, 构造新型能量完全守恒计算格式。该新型计算格式也因此应具有比相应传统格式更加优良的性能, 而且这种改进可以是根本性的。进一步的关于 Rossy-Haurwitz

波准确解新型能量守恒与传统计算方案的比较数值试验也客观地证实了以上论断。如比较数值试验揭示:传统方案存在系统误差,从而导致一种不能通过减小时间积分步长改变的“气候漂移”现象。而新方案则可以18倍地加大相应传统方案积分步长,用1/9计算量的,延长其积分时效50%以上,并且在此积分时间内可使计算解完全收敛于物理解(计算机舍入误差水平)。这意味着:与传统方案相比较,能量完全守恒正压原始方程拟谱方案,确可具有更好的计算精度,更长的计算时效,更高的计算效率。新计算方案从计算理论与计算实践两方面解决了非线性计算稳定性与能量整体守恒性质的保持问题。新计算方案还在计算实践上提供了解决非线性计算收敛性问题的实例。

此外,传统计算观念^[14]认为,时间差分离散误差很小,不重要,而本文及最近其它工作^[2-6]所展示的计算格式性能,在量与质上的重大改进恰恰是在努力合理消除时间离散引入的系统误差之后获得的。这表明此传统观念至少不具普适性,似需重新考虑。

参考文献

- [1] 曾庆存, 张学洪. 完全保持能量守恒的可压缩流体时-空差分格式及其协调的分解算法. 中国科学, 1981, 11: 1355—1366.
- [2] 王斌, 季仲贞. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验. 科学通报, 1990, 35 (10): 766—768.
- [3] 钟青. 半隐式完全平方守恒时间差分格式的构造及其初步检验. 科学通报, 1991, 36 (19): 1480—1483.
- [4] 钟青. 发展问题新计算理论及其应用. 中国科学技术协会首届青年学术年会论文集(理科分册), 1992, 473—479.
- [5] Zhong Qing. Theory of perfect square conservative scheme and its preliminary application. WHO Working Group of Numerical Experiment 1992 Report, 1992, No. 17, p 326.
- [6] 钟青. 论发展问题保真格式的一般构造原理和若干应用. 庆祝计算物理协会成立十周年“计算物理”特刊, 1992, 9 (4): 758—764.
- [7] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Part I. J Comput Phys, 1966, 1: 119.
- [8] Lilly D K. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. Mon Wea Rev, 1965, 93: 11.
- [9] Chang J. General circulation models of the atmosphere. Academic Press, 1977.
- [10] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. 2nd edition. Springer Verlag, 1979.
- [11] Bourke W. An efficient, one-level, primitive equation spectral model. Mon Wea Rev, 1972, 100 (9): 683—689.
- [12] Haltiner J, Williams R T. Numerical prediction and dynamic meteorology. second edition. New York, 1980.
- [13] Phillips N A. Numerical integration of the primitive equations on the Hemisphere. Mon Wea Rev, 1959, 87: 333—345.
- [14] 蒋伯诚, 周振中, 常谦顺. 计算物理中的谱方法——FFT 及其应用. 湖南科学技术出版社, 1989.

A LONG VALID TIME ENERGY PERFECT CONSERVATIVE PSEUDOSPECTRAL SCHEME OF BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATIONS

Zhong Qing

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica, Beijing, China, 100080)

Abstract

Here, a meteorological traditional global pseudo-spectral scheme of barotropic primitive equation is restructured and a corresponding perfect energy conservative new scheme is formulated in accordance with the compensation principle of discrete computation. Thus, the problems of both nonlinear computational instability and perfect energy conservation are completely solved, and the computational function of the traditional scheme is improved.

As the numerical experiments of the new schemes show, by solving the problem of energy conservation, the new scheme in computational practice can solve their own problem of (nonlinear) computational instability and that of (nonlinear) computational convergence under certain condition. Further contrasts between the new schemes and the traditional one also indicate that, in discrete computational practice the new scheme in case of nondivergence is capable of enlarging the valid integral time of the corresponding traditional scheme, capable of solving its own problem of "climate drift", while at the same time improving its computational accuracy and reducing its amount of computation.

The working principle of this paper can also be applied in the case of baroclinic primitive equation.

Key words: Nonlinear computational instability, Nonlinear computational convergence, Perfect energy conservative spectral scheme, Long valid time, Climate drift.