

副高与阻高形成的 Rossby 孤立波理论 I: 不存在临界层*

范红 缪锦海 杨玉峰**

(北京气象学院, 北京, 100081)

摘 要

针对不存在临界层情况下非均匀纬向流中的 Rossby 孤立波, 从正压、无辐散、准地转自由大气涡度方程出发, 经过变量替换, 用小参数展开法, 得到流函数的各阶近似方程, 推导出振幅函数满足的 KdV 方程及修正 KdV 方程(MKdV), 并给出它们的孤立波解。对不同风速分布下伴随这些孤立波而出现的流场进行了近似计算, 分别得到了副高型 Rossby 孤立波流场、阻高型 Rossby 孤立波流场及偶极子型流场, 它们移动的规律性与实际大气的流场移动情况较一致。

关键词: Rossby 孤立波, 副高, 阻高。

1 引 言

副热带高压和阻塞高压(以下分别简称为副高和阻高)都是大气中具有明显的永久形态、有持续性且尺度很大的系统。研究其动力学性质必需采用非线性动力学的方法。首先采用非线性动力学方法研究大气中具有永久形态而持续的孤立波现象的是 Long^[1](1964), 他从理论上证明, 在 β 平面上大气可以出现孤立波。后来 Redekopp^[2](1977)详细研究了 Rossby 孤立波理论, 并由给定风场结构下得到了出现这些孤立波的流场。近年来, 不少学者用 Rossby 孤立波理论来解释阻高和偶极子的形成^[3,4], 而副高形成的非线性理论甚少。缪锦海等^[5,6]曾用非线性定性理论较好地解释了副高的突变现象, 但对于副高移动性定量规律还没有进行动力学的研究。能否用 Rossby 孤立波理论来解释其形成, 进而得到其移动性的定量规律方面的工作, 到目前为止尚未看到。这是因为副高与阻高处于明显不同的基本气流中, 即阻高只是西风带中的现象, 而副高则是东西风带之间的现象。因为这关系到存在临界层的问题, 它将给理论工作带来极大的困难。本文的工作, 就是试图用 Rossby 孤立波理论在无临界层条件下建立副高形成和移动的非线性动力学理论, 同时也讨论阻高形成的理论及副高与阻高形成的不同条件。

2 基本理论

2.1 基本方程的推导

在不考虑地形的情况下, 从正压、无辐散、准地转自由大气的无量纲化涡度方程出发:

* 初稿时间: 1993 年 8 月 14 日, 修改稿时间: 1994 年 6 月 14 日。

** 第二作者现地址: 成都气象学院, 成都, 610041; 第三作者现地址: 郑州东西方信息工程公司, 郑州, 450007。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中 $\Psi (= \varphi/f)$ 为流函数, $\beta (= \partial f / \partial y = 2\Omega \cos \psi / a)$ 为 Rossby 参数, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维拉普拉斯算子, $J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$ 为 Jacobi 算子。假设存在一个小扰动 $\epsilon (0 < \epsilon \ll 1)$ 叠加在基本切变流 $\bar{u}(y)$ 上, 即

$$\Psi(x, y, t) = - \int_y \bar{u}(y) dy + \epsilon \psi \quad (2)$$

代入式(1)得到扰动流函数 ψ 的方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \epsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) + \bar{u}(y) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + (\beta - \bar{u}') \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

经如下变量替换:

$$\xi = \sqrt{\epsilon} (x - ct), \quad T = \sqrt{\epsilon^3} t, \quad y = y$$

则 $\frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\epsilon^3} \frac{\partial}{\partial T} - c \sqrt{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \xi}$, 其中 c 是一待定常数, 得到:

$$\begin{aligned} & (\epsilon \frac{\partial}{\partial T} - c \frac{\partial}{\partial \xi}) (\epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi - \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & (\epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi + \bar{u}(y) \frac{\partial}{\partial \xi} (\epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi + (\beta - \bar{u}') \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

用 WKB 法求对扰动流函数 ψ 近似解, 即设:

$$\psi = \psi_0(\xi, y, T) + \epsilon \psi_1(\xi, y, T) + \epsilon^2 \psi_2(\xi, y, T) + \dots \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得到:

$$\begin{aligned} & H(\psi_0) + \epsilon [H(\psi_1) + \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_0 + (\bar{u} - c) \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \psi_0 \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \psi_0 - \frac{\partial}{\partial y} \psi_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_0] + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中算子 $H(A) = \frac{\partial}{\partial \xi} [(\bar{u} - c) \frac{\partial^2}{\partial y^2} A + (\beta - \bar{u}') A]$ 。假设运动限制在 $y_1 \rightarrow y_2$ 之间, 采用边界条件:

$$\psi_i(\xi, y_1, T) = \psi_i(\xi, y_2, T) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

根据式(6)得到:

$$\epsilon^0: H(\psi_0) = 0 \quad (8)$$

$$\epsilon^1: H(\psi_1) + \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_0 + (\bar{u} - c) \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \psi_0 + \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \psi_0 - \frac{\partial}{\partial y} \psi_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi_0 = 0 \quad (9)$$

对于式(8), 采用分离变量法求解, 即令:

$$\psi_0 = A(\xi, T) \cdot G(y) \quad (10)$$

要求当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $A \rightarrow 0$, 且 A 不为常数, 又根据边界条件(7)知:

$$G(y_1) = G(y_2) = 0 \quad (11)$$

把式(10)代入式(8)有: $\frac{\partial A}{\partial \xi} \cdot [(\bar{u} - c) \cdot \frac{d^2 G}{dy^2} + (\beta - \bar{u}') G(y)] = 0$ 。其中 $\frac{\partial A}{\partial \xi} = 0$ 显然不合

要求,故有:

$$(\bar{u} - c) \frac{d^2G}{dy^2} + (\beta - \bar{u}')G = 0 \quad (12)$$

假设在 $[y_1, y_2]$ 之间没有奇点,即不存在一点 y_c 使 $\bar{u}(y_c) - c = 0$, 则:

$$\begin{cases} \frac{d^2G}{dy^2} + p(y)G = 0 & \text{其中 } p(y) = \frac{\beta - \bar{u}'}{\bar{u} - c} \\ G(y_1) = G(y_2) = 0 \end{cases} \quad (13a)$$

$$G(y_1) = G(y_2) = 0 \quad (13b)$$

由此可以看出, c 是所要求的本征值, $G(y)$ 是满足边条件(13b)的本征函数。如求出 c 和 $G(y)$, 把式(10)代入式(9)有:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} [(\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + (\beta - \bar{u}') \psi_1] + \frac{\partial A}{\partial T} \cdot \frac{d^2G}{dy^2} \\ & + (\bar{u} - c)G \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} + (G \frac{d^3G}{dy^3} - \frac{dG}{dy} \frac{d^2G}{dy^2})A \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

上式两端同时除以 $(\bar{u} - c)$, 并根据式(13a)化简得:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + p(y) \psi_1) - \frac{p(y) \cdot G}{\bar{u} - c} \cdot \frac{\partial A}{\partial T} + G \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} - G^2 \cdot p'(y) \cdot A \frac{\partial A}{\partial \xi} / (\bar{u} - c) = 0 \quad (14)$$

把上式两端同时乘以 $G(y)$, 并从 y_1 积分至 y_2 , 左端第一项:

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} G \frac{\partial}{\partial \xi} (\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + p(y) \psi_1) dy = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{y_1}^{y_2} G (\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + p(y) \psi_1) dy \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} [\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} (G \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \psi_1 \frac{dG}{dy}) dy + \int_{y_1}^{y_2} \psi_1 (\frac{d^2G}{dy^2} + p(y)G) dy] \end{aligned}$$

根据式(13)知:

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} (G \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \psi_1 \frac{dG}{dy}) dy = 0 \\ & \int_{y_1}^{y_2} \psi_1 (\frac{d^2G}{dy^2} + p(y)G) dy = 0 \end{aligned}$$

故: $\int_{y_1}^{y_2} G \frac{\partial}{\partial \xi} (\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + p(y) \psi_1) dy = 0$ 则:

$$\frac{\partial A}{\partial T} + RA \frac{\partial A}{\partial \xi} + S \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} = 0 \quad (15)$$

其中:

$$R = \int_{y_1}^{y_2} \frac{G^3 p'(y)}{\bar{u} - c} dy / \int_{y_1}^{y_2} \frac{p(y)G^2}{\bar{u} - c} dy \quad (15a)$$

$$S = \int_{y_1}^{y_2} G^2 dy / - \int_{y_1}^{y_2} \frac{p(y)G^2}{\bar{u} - c} dy \quad (15b)$$

式(15)就是著名的 KdV 方程, $A(\xi, T)$ 的变化必须满足 KdV 方程, 其孤立波解是:

$$A(\xi, T) = \text{sgn}(RS) \cdot \text{sech}^2 [|R/12S|^{1/2} \cdot (\xi - \omega T)] \quad (16)$$

其中 $\omega = -\frac{1}{3} |R| \cdot \text{sgn}(S)$, 而 $\text{sgn}(S) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 用原变量 (x, t) 表示则有:

$$A(x, t) = \operatorname{sgn}(RS) \cdot \operatorname{sech}^2\{(\epsilon|R/12S|)^{1/2} \cdot [x - (c + \epsilon\omega)t]\} \quad (17)$$

只要求出了本征值 c 和本征函数 $G(y)$, 以上的问题就可以迎刃而解了。因为我们认为在区域内没有奇点, 考虑到在任意风场情况下, 求 $G(y)$ 的解析解很困难, 因此用数值法求其近似解。

将区间 $[y_1, y_2]$ 做 $n+1$ 等分, $i=0$ 时 $y=y_1$, $i=n+1$ 时, $y=y_2$, $\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{n+1}$, 采用中央差分法把式(12)写成差分的形式:

$$(\bar{u}_i - c) \frac{G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}}{|\Delta y|^2} + (\beta_i - \bar{u}_i') G_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

由边条件(13b)得 $G_0 = G_{n+1} = 0$, 改写式(18)为:

$$\bar{u}_{i-1} G_{i-1} + M_i G_i + \bar{u}_i \cdot G_{i+1} = c(G_{i-1} - 2G_i + G_{i+1})$$

写在 $i = 1, 2, \dots, n$ 个格点上为:

$$\bar{u}_1 G_0 + M_1 G_1 + \bar{u}_1 \cdot G_2 = c(G_0 - 2G_1 + G_2)$$

.....

$$\bar{u}_n G_{n-1} + M_n G_n + \bar{u}_n G_{n+1} = c(G_{n-1} - 2G_n + G_{n+1})$$

其中 $G_0 = G_{n+1} = 0$, $M_i = (\beta_i - \bar{u}_i')(\Delta y)^2 - 2\bar{u}_i$, 把上述诸式写成矩阵的形式:

$$D \cdot F = c \cdot D_1 \cdot F \quad (19)$$

其中:

$$D = \begin{pmatrix} M_1 & \bar{u}_1 & & & & \\ \bar{u}_2 & M_2 & \bar{u}_2 & & & \\ & & \dots\dots & & & \\ & & & \bar{u}_{n-1} & M_{n-1} & \bar{u}_{n-1} \\ 0 & & & & \bar{u}_n & M_n \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \dots\dots & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F = (G_1, G_2, \dots, G_n)'$$

把式(19)两端同乘 D_1^{-1} 得:

$$D_1^{-1} \cdot D \cdot F = c \cdot F \quad (20)$$

由上式可知: c 便是矩阵 $D_1^{-1}D$ 的特征值, F 是相应的特征向量, 用此方法可近似求出 $G(y)$ 和 c 的值。

2.2 MKdV 方程的求解

对式(3)做如下变量替换:

$$\xi = \epsilon(x - ct), \quad T = \epsilon^3 t, \quad y = y$$

则: $\frac{\partial}{\partial x^n} = \epsilon^n \frac{\partial}{\partial \xi^n}$, $\frac{\partial}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y^n}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial T} - \epsilon \cdot c \frac{\partial}{\partial \xi}$, 代入式(13)得:

$$\begin{aligned} & (\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T} - c \frac{\partial}{\partial \xi}) (\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi \\ & - \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} (\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi + \bar{u}(y) \frac{\partial}{\partial \xi} (\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \psi + (\beta - \bar{u}') \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

把 ψ 展成级数:

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon \psi_2 + \dots \quad (22)$$

代入式(21)得:

$$\begin{aligned} & H(\psi_0) + \epsilon[H(\psi_1) + \frac{\partial\psi_0}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3} - \frac{\partial\psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^2}] \\ & + \epsilon^2[H(\psi_2) + \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^2} + (\bar{u} - c) \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3} + \frac{\partial\psi_0}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_1}{\partial y^3} \\ & + \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3} - \frac{\partial\psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^2}] + O(\epsilon^3) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

仍然采用如下的边界条件:

$$\psi_i(y_1, \xi, T) = \psi_i(y_2, \xi, T) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

因此:

$$\epsilon^0: H(\psi_0) = 0 \quad (25)$$

$$\epsilon^1: H(\psi_1) + \frac{\partial\psi_0}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3} - \frac{\partial\psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^2} = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2: & H(\psi_2) + \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^2} + (\bar{u} - c) \cdot \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3} \\ & + \frac{\partial\psi_0}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_1}{\partial y^3} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3} - \frac{\partial\psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_1}{\partial y^2} \\ & - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

仍然采用分离变量法求解式(25),即令:

$$\psi_0 = A(\xi, T)K(y) \quad (28)$$

边条件

$$K(y_1) = K(y_2) = 0 \quad (29)$$

对 $A(\xi, T)$ 的要求同 2.1 节,把式(28)代入式(25)有:

$$\frac{\partial A}{\partial\xi} [(\bar{u} - c) \frac{d^2K}{dy^2} + (\beta - \bar{u}')K] = 0$$

显然 $\frac{\partial A}{\partial\xi} = 0$, 不合要求,则有:

$$(\bar{u} - c) \frac{d^2K}{dy^2} + (\beta - \bar{u}') \cdot K = 0 \quad (30)$$

推出:

$$\frac{d^2K}{dy^2} + \frac{\beta - \bar{u}'}{\bar{u} - c} K = 0, \quad \text{令 } p(y) = \frac{\beta - \bar{u}'}{\bar{u} - c} \quad (\bar{u} - c \neq 0) \quad (31)$$

c 则是要求的特征值, $K(y)$ 为满足边条件(29)的本征函数。把式(28)代入式(26)化简得:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} [(\bar{u} - c) \cdot \frac{\partial^3\psi_1}{\partial y^2} + (\beta - \bar{u}')\psi_1] = A \cdot \frac{\partial A}{\partial\xi} \cdot p'(y) \cdot K^2(y) \quad (32)$$

对 ψ_1 也进行分离变量,令 $\psi_1 = B(\xi, T) \cdot E(y)$ 代入式(32)有:

$$\frac{\partial B}{\partial\xi} [(\bar{u} - c) \frac{d^2E}{dy^2} + (\beta - \bar{u}')E] = A \frac{\partial A}{\partial\xi} \cdot p'(y) \cdot K^2(y) \quad (33)$$

可设 $B = \frac{1}{2}A^2$, 则 $\psi_1 = \frac{1}{2}A^2 \cdot E(y)$ 同样也有边条件

$$E(y_1) = E(y_2) = 0 \quad (34)$$

则

$$(\bar{u} - c) \frac{d^2 E}{dy^2} + (\beta - \bar{u}')E = p'(y) \cdot K^2(y) \quad (35)$$

推出

$$\frac{d^2 E}{dy^2} + p(y) \cdot E = p'(y) \cdot K^2(y) / (\bar{u} - c) \quad (36)$$

把式(28)和式(33)同时代入 ϵ^2 阶的式(27)得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} [(\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + (\beta - \bar{u}')\psi_2] + \frac{\partial A}{\partial T} \cdot \frac{d^2 K}{dy^2} + (\bar{u} - c) \cdot K \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} \\ & + A^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \cdot K \cdot \frac{d^2 E}{dy^2} + E \frac{d^3 K}{dy^3} - \frac{dK}{dy} \cdot \frac{d^2 E}{dy^2} - \frac{1}{2} \frac{dE}{dy} \cdot \frac{d^2 K}{dy^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

上式两端同除以 $(\bar{u} - c)$ 化简得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + p(y)\psi_2 \right] = \frac{p(y) \cdot K}{\bar{u} - c} \cdot \frac{\partial A}{\partial T} - K \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} \\ & + \left[\frac{3}{2} p'(y) \cdot K \cdot E - \frac{1}{2} K^3 \left(\frac{p'(y)}{\bar{u} - c} \right) \right] \cdot A^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi} / (\bar{u} - c) \end{aligned} \quad (37)$$

式(37)两端同乘以 $K(y)$ 并从 y_1 积分至 y_2 , 和 2.1 节相同可证明其左端为零, 故有:

$$\frac{\partial A}{\partial T} + R_0 A^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial \xi} + S_0 \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} = 0 \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} R_0 &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\frac{3}{2} p'(y) K^2 \cdot E - \frac{1}{2} K^4 [p'(y) / (\bar{u} - c)]}{\bar{u} - c} dy / I_0 \\ S_0 &= - \int_{y_1}^{y_2} K^2 dy / I_0 \quad I_0 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{p(y) K^2}{\bar{u} - c} dy \end{aligned}$$

式(38)就是修正的 KdV 方程(简称 MKdV 方程)。

当 $R_0 > 0$ 时, 得到如下孤立波解: $A(\xi, T) = \pm \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{R_0}{|6S_0|}} \cdot (\xi - \omega T) \right]$ (39)

$$\omega = \frac{1}{6} R_0 \cdot \operatorname{sgn}(S_0)$$

故

$$A(x, t) = \pm \operatorname{sech} \left\{ \epsilon \sqrt{\frac{R_0}{|6S_0|}} [x - (c + \epsilon^2 \omega)t] \right\} \quad (40)$$

我们仍用数值法求 c, K 及 E 的近似解。 c, K 的求法和 2.1 节相同, 现求 E 。把式(36)写成差分形式

$$\begin{aligned} \frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{(\Delta y)^2} + P_i E_i &= \frac{P'_i \cdot K_i^2}{\bar{u}_i - c} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ E_0 = E_{n+1} &= 0 \quad \text{上式可改写为:} \end{aligned}$$

$$E_{i-1} + \delta_i E_i + E_{i+1} = \Omega_i \quad (41)$$

其中

$$\delta_i = P_i (\Delta y)^2 - 2, \quad \Omega_i = \frac{P'_i \cdot K_i^2}{\bar{u}_i - c} \cdot |\Delta y|^2$$

对 $i = 1, 2, \dots, n$ 写成矩阵形式:

$$D_2 \cdot F_2 = D_3$$

其中

$$D_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & \delta_2 & 1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \delta_{n-1} & 1 \\ 0 & & & & 1 & \delta_n \end{pmatrix}$$

$$F_2 = (E_1, E_2, \dots, E_n)', \quad D_3 = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)'$$

所以

$$F_2 = D_2^{-1} \cdot D_3$$

因此可近似求出 E 。

在以上推导中 \bar{u} 是 y 的函数,而不能是常数,否则就不存在 KdV 或 MKdV 方程,因此气流的切变是一个很重要的条件。

3 对副高型 Rossby 孤立波及阻高型 Rossby 孤立波、偶极子型孤立波的计算

3.1 副高型 Rossby 孤立波

副高是制约大气环流的有永久形态且又持久的天气系统,它的变化或异常会影响大范围地区的天气变化。因此对其活动的研究显得十分重要。

按照以上分析的计算方法,取基本风场为 $\bar{u}(y) = -u \sin k(y + y_0)$,在几种不同风场分布的情况下,得到不同结果,如图 1 所示。

可以看到,图 1a 初始时刻 $x = 0$ 处出现一强大反气旋,缓慢西移,中心强度变化不大。图 1b 整个西风带南移,强度增大,东风强度减弱,此时的反气旋强度减弱,位置偏南,快速东移。图 1c 东风带北移强度增加,西风带减弱,此时反气旋强度加强,位置偏北,缓慢西移。

在实际大气中,从春到夏,东风带不断北移且强度加强,而西风带强度减弱,西太平洋副高也不断加强且向西北方向移动。相反,从秋到冬,西风带不断南移且强度增强,而东风带则相应减弱,西太平洋副高也不断减弱,且向东南方向移去。我们所模拟的这一反气旋的变化和西太平洋副高的季节性变化规律相当一致。因为伴随这一孤立波的流场类似于副高,故称之为副高型 Rossby 孤立波流场。

黄土松^[6]等在研究西太平洋副高的活动及其预报的问题时,曾得到如下的经验公式:

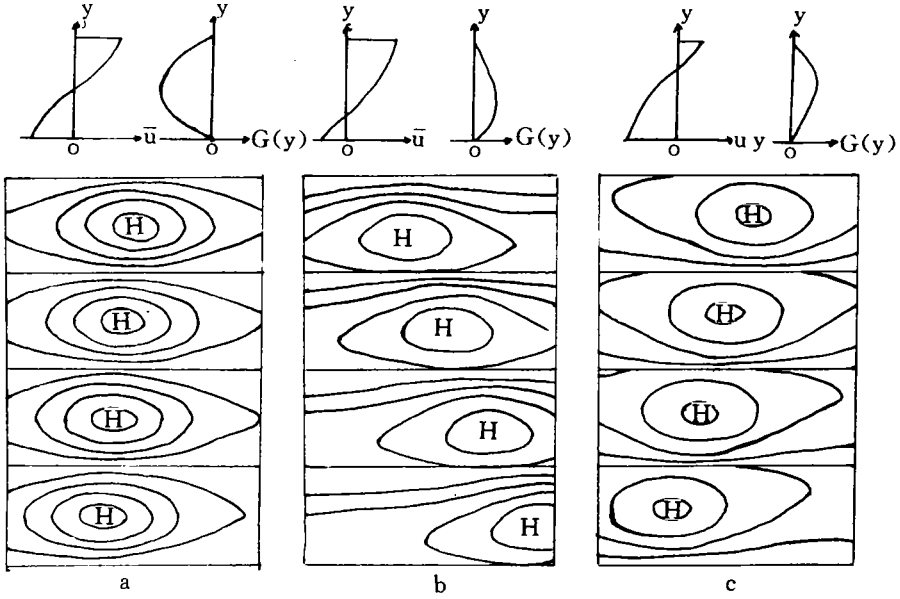


图 1 副高型 Rossby 孤立波

(上方小图为基本气流 \bar{u} 及相应的本征函数 $G(y)$ 随纬度 y 的分布;

下方流场图为与 $\bar{u}, G(y)$ 对应的流场按时间先后顺序(从上至下)的发展及移动情况)

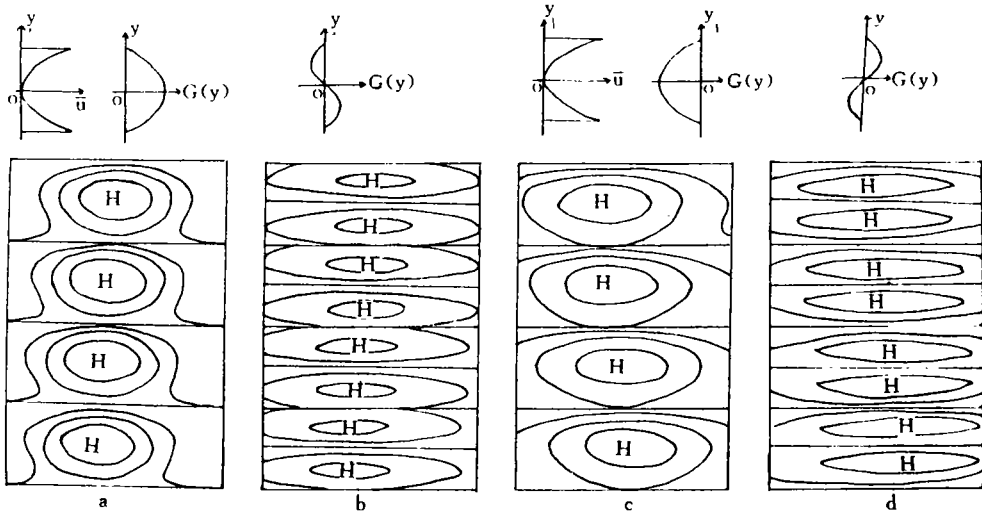


图 2 阻塞型 Rossby 孤立波(a,c)及偶极子型孤立波(b,d)

(a,b 为相同风场,c,d 为相同风场)

$c = -\left(\frac{a}{b}\right)^2(0.39\Delta\bar{u} + 0.09b^2\cos\varphi_0)$, c 指副高的东西向移动速度, a 和 b 分别为副高的横半轴及纵半轴, φ_0 为副高中心所在的纬度, $\Delta\bar{u}$ 为副高南北两侧东西风最大风速差。当 $\Delta\bar{u} > 0$, 即东风大于西风时, $c < 0$, 副高将向西移动, $\Delta\bar{u} < 0$ 西风大于东风时, $c > 0$, 副高将向东移动。模拟的结果和上面的结论相当吻合。

3.2 阻塞型 Rossby 孤立波及偶极子型孤立波

阻高是西风带的大型天气系统, 阻高有时单独出现有时和切断低压同时出现。同时出现时称作偶极子。下面仍用 KdV 方程的解对其进行模拟。

取抛物线型基本风场, $\beta = \beta(\varphi_0) = \beta(55^\circ\text{N})$, $\bar{u}(y) = ry^2$, $r > 0$, 图 2a 模拟的反气旋缓慢西移。图 2b 的风场与图 2a 同, 但本征函数分布改变, 出现流场为偶极子形势, 向西移动。图 2c、图 2d 风速增大, 在不同的本征函数下, 分别出现阻高型(图 2c)和偶极子型(图 2d)流场, 缓慢东移。

由以上两个试验得知, 当本征值较小, 本征函数呈对称分布时出现阻高型 Rossby 孤立波反气旋; 本征值较大, 本征函数呈反对称分布, 此时则出现偶极子。我们改用正弦型基本风场, 也做了两个试验, 结果与以上类似。因此无论是抛物型还是正弦型基本风场, 我们均得到了北高南低的偶极子和类似于阻高的反气旋, 它们均随着风速的增加、切变的增强而有所增强。因为这种孤立波的流场类似于阻高, 故称为阻塞型 Rossby 孤立波流场。

我们用 MKdV 方程也同样可以进行模拟, 其结果和 KdV 方程的模拟较接近, 在此不再详细讨论。

4 结语

通过以上理论分析和数值试验, 可以得到以下一些初步结果:

(1) 在具有基本气流的 β 平面的非线性正压大气条件下, 由于非线性与频散性相互平衡, 可以形成非线性大气的基本波动——Rossby 孤立波。此 Rossby 孤立波的基本特征、强度和位置等的变化, 在给定 β 平面特征条件下, 主要受基本气流的分布特征、强度和位置变化的影响。由于东西风带的形成与平均经圈环流(包括 Hadley 环流)的形成是互相联系着的, 因此, Rossby 孤立波的特征变化, 也会受平均经圈环流的特征变化的影响。

(2) 当基本气流为东西风带, β 为 y 的函数时, 可以产生副高型的 Rossby 孤立波, 当西风带范围扩大, 西风风速增大, 而东风带风速减小时, 副高型孤立波位置偏南, 强度减弱, 且明显东移。相反, 当东风带北上, 东风风速增大, 西风带风速减小时, 副高型孤立波位置偏北, 强度增强而且缓慢西移, 这与副高的季节性变化规律很相似, 而且与其中短期移动规律近似一致。这种变化规律与风带突变相结合就会出现副高的季节性突变。

(3) 当基本气流为西风带, 在 β 平面上, 可以出现阻高型的 Rossby 孤立波。强度随风速的增大而增强。在 β 平面上, 用抛物线型和正弦型基本风场均可模拟出北高南低的偶极子流型。

本文是在基本气流不出现临界层情况下讨论的。当系统移动速度 c 等于零时, 临界纬度就出现在东西风带之间的零风速纬度上。因此, 讨论副高型 Rossby 孤立波必须在基本气流有临界层情况下进行。这将在另一篇文章中讨论。

参考文献

- [1] Long R R. Solitary waves in the westerlies. *J Atmos Sci.* 1964. 21: 197—200.
- [2] Redekopp L G. On the theory of solitary Rossby waves. *J Fluid Meth.* 1977. 82: 725—745.
- [3] 罗德海. 大气中阻塞形成的一个理论. *中国科学 B 辑.* 1989. 1: 103—112.
- [4] 罗哲贤, 马镜娴. 强迫耗散非线性系统的局域阻塞流型. *大气科学.* 1991. 15 (4): 17—25.
- [5] 缪锦海等. 热力强迫下大气平衡态的突变与季节变化、副高北跳. *中国科学 B 辑.* 1985. 1: 87—96.
- [6] 陆则慰, 缪锦海. 地形和加热强迫下低阶模式中的平衡态、分叉和突变. *北京气象学院学术论文集.* 北京: 气象出版社. 1987. 1—9.
- [7] 潘菊芳. 太平洋高压移动规律性的探讨. *气象学报.* 1954. 25 (2): 101—122.
- [8] 黄士松. 有关副热带高压活动及其预报问题的研究. *气象学报.* 1963. 33 (3): 320—331.

THE THEORY OF SOLITARY ROSSBY WAVES OF THE FORMATION OF SUBTROPICAL HIGH AND BLOCKING HIGH PART I : WITHOUT A CRITICAL LAYER

Fan Hong Miao Jinhai Yang Yufeng

(*Beijing Institute of Meteorology, Beijing, 100081*)

Abstract

The solitary Rossby waves in the nonuniformed zonal flows in the barotropic atmosphere were studied. The Korteweg-de Vries equation or the modified Korteweg-de Vries equation describing the wave evolution by introducing multiple-scale variables are obtained. Streamline patterns accompanying these waves are computed respectively in different zonal currents. Three kinds streamline patterns are obtained: the subtropical high pattern, the blocking high pattern and the dipole pattern. For the subtropical high pattern, we obtained that its evolution is the same as that of the actual subtropical high. For the later two kinds, when the wind speed and shear increase, their intensities are strengthened.

Key words: Solitary Rossby waves. Subtropical high. Blocking high.