圆形涡旋中心非对称扰动的斜压不稳定研究

陶建军¹ 余越昕² 李朝奎¹ TAO Jianjun¹ YU Yuexin² LI Chaokui¹

1. 湖南科技大学地理系,湘潭市,411201

2. 湘潭大学数学系,湘潭市,411105

1. Geography Department, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China

2. Mathematics Department, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China

2007-01-31 收稿,2007-04-06 改回.

Tao Jianjun, Yu Yuexin, Li Chaokui. 2008. The barocline instability of wave in the center of the circular vortex. Acta Meteorologica Sinica, 66(4):520-525

Abstract The asymmetrical perturbation is an ordinary form of motion in vortices, such as the mesoscale deep convection cloud area in a tropical storm, the dissymmetry of a tropical storm when it develops, the fact that the circulation center of a tropical storm is often located at the edge of a thick/dense cloud system and so on. The researches on asymmetrical perturbations, especially on the development mechanism of perturbation, at present are also quite few. This article studies the asymmetric unstable waves at the center of a circular vortex in the cylindrical coordinates, and the following results are obtained: (1) The baroclinic instability appears more easily in the circular circulation of a vortex than it does in a straight basic flow. (2) The instability causes the energy conversion from the basic flow to the perturbation flow, and at the same time, the vortex becomes asymmetric. The perturbation in the conversion process is one kind of internal gravity waves, whose propagation velocity is far smaller than the angular velocity of the basic flow, such that some propagate reversely and slowly against the basic flow. (3) Under the usual stability parameter condition, the growing perturbation mainly concentrates in upper troposphere, and its tilting angle is small. (4) The high-level anticyclone may also induce the unstable internal waves especially in the low level. The perturbation develops quickly and propagates reversely and slowly against the basic flow, when the stability parameter is smaller. **Key words** Circular vortex, Unstable wave, Asymmetrical perturbation, Gravitational wave

摘 要 涡旋中的非对称扰动又是一种较为常见的流体运动现象,如不成熟飓风中出现的中尺度深厚对流云区(又称圆形抽 气云 CEC),热带风暴发展时的不对称性以及环流中心往往位于浓密云区的边缘等,都是涡旋中存在不对称扰动的表现形式。 然而对于涡旋中非对称扰动的稳定性问题的研究,目前还比较少。文中从柱坐标下的斜压模式出发,研究了热带气旋等一类 涡旋中心的非对称扰动的不稳定问题,结果表明:(1)与平直的基本流相比,涡旋中更容易出现斜压不稳定,扰动更容易发展; (2)不稳定可以使涡旋中的能量由基本场向扰动场转换,涡旋变得不对称。扰动是一种重力内波,其传播速度远小于基本流 角速度,有些甚至逆基本流缓慢倒转;(3)在通常的稳定度参数条件下,发展扰动主要集中在高层,从结构上看,扰动的倾斜度 大。当稳定度参数很小时,扰动可扩展到整个对流层,倾斜度较小;(4)高层反气旋也可以激发出不稳定内波,这种扰动在低层 表现明显。当稳定度参数较小时,扰动发展较快,并且也以很小的速度倒转。

关键词 圆形涡旋,不稳定波,非对称扰动,重力波

中图法分类号 P40

^{*} 资助课题:国家自然科学基金项目(40671153)。 作者简介:陶建军,主要从事动力气象的研究。E-mail:tao043@163.com

1 引 言

大气科学领域的扰动的稳定性研究已经成为较 经典的问题,其中包括正压不稳定、斜压不稳定、对 称不稳定等(张可苏,1988),但是,近似作刚体运动 的大气涡旋中心部分的稳定性问题,还研究较少。 如不成熟飓风中出现的中尺度深厚对流云区(又称 圆形抽气云 CEC)(句澄澜,1980),热带风暴发展时 的不对称性以及环流中心往往位于浓密云区的边缘 等(包澄澜,1980;王志烈,1987),说明涡旋系统内 部,确实有不稳定系统的发展。因为风暴初期的基 本切向流场有较大的垂直切变,所以,应该考虑斜压 不稳定问题。最近对于台风中的斜压性以及诸如螺 旋波等一些非对称扰动研究已经有不少的成果(余 贞素,2007;黄泓,2008;滕代高,2008;陶建军, 2008),但涡旋中心扰动的斜压不稳定的理论研究还 很少。另一方面,由实际观测结果表明:对于发展中 的热带风暴来说,最大风速半径一般为200 km 左 右,随着系统的发展,最大风速半径会逐渐缩小(魏 鼎文,1988),这对于最大风速以内的热带气旋来说, 可以近似地看成作刚体运动(Miller,1967),这时区 域内平均流场的相对涡度和地转涡度同量级甚至还 要高一个量级。文中将根据这一特点,对大气涡旋 中心的非对称扰动的斜压不稳定问题作一些探讨, 以期得到某些有意义的结果。

2 本征方程的导出

取柱坐标下的有量纲斜压线性模式 $\left(\frac{\partial}{\partial t^{*}} + \frac{\overline{V}_{\theta}}{r^{*}} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) v_{\theta}^{*} + \left(f^{*} + \frac{\overline{V}_{\theta}}{r^{*}} + \frac{\partial \overline{V}_{\theta}}{\partial r^{*}}\right) v_{r}^{*} + w^{*} \frac{\partial \overline{V}_{\theta}}{\partial z} = -\frac{1}{r^{*}} \frac{\partial p^{*}}{\partial \theta}$ (1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\overline{V}_{\theta}}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) v_r^* - \left(f^* + \frac{2\overline{V}_{\theta}}{r^*}\right) v_{\theta}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*}$$
(2)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\overline{V}_{\theta}}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) w^* - \theta_{\rm se}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\overline{V}_{\theta}}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \theta_{se}^* + v_r^* \frac{\partial \overline{\theta}_{se}}{\partial r^*} + \hat{N}^2 w^* = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial (r^* v_r^*)}{r^* \partial r^*} + \frac{\partial v_{\theta}^*}{r^* \partial \theta} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0$$
(5)

$$\ddagger \vdash (v_{\theta}^*, v_r^*, w^*, \theta_{se}^*) \equiv \bar{\rho} \Big(v_{\theta}', v_r', w', \frac{g}{\theta_0} \theta_{se}' \Big), \hat{N}^2$$

$$= \frac{g}{\bar{\theta}_{se}} \frac{\partial \theta_{se}}{\partial z^*} . \quad \bar{x} = \bar{x} + \bar$$

$$-f\overline{V}_{\theta} - \frac{\overline{V}_{\theta}^{2}}{r^{*}} = -\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r^{*}}$$
(6)

θ_s。为假相当位温。其他均为气象学中常用符号,星 号表示有量纲量。

假定涡旋中心附近流体近似作刚体运动,为简 单起见,设基本流分布为(Miller, 1967)

$$\overline{V}_{\theta} = \Omega^* \left(1 - \lambda^* z^* \right) r^* \tag{7}$$

这里 Ω^* 为刚体角速度, λ^* 为垂直切变系数。

令 $\Omega_0 = V_0/r_0$, 并取 $(v_r^*, v_\theta^*) = V_0(v_r, v_\theta)$; $r^* = r_0 r$; $t^* = \Omega_0 t$; $z^* = D_0 z$, $w^* = (V_0 D_0/r_0) w$; $\theta_{se}^* = \frac{V_0^2}{D_0} \theta_{se}$; $\overline{V}_\theta = V_0 \overline{V}$; $f = f^* \frac{r_0}{V_0}$; $N^2 = \frac{g}{\overline{\theta}_{se}} \frac{\overline{\partial}_{se}}{\partial z} = D_0 \hat{N}^2$; $\Omega^* = \Omega_0 \Omega$; $\lambda^* = \frac{\lambda}{D_0} v_0$ 为旋转刚体边缘的切向速度, r_0 为

刚体旋转半径,D。为垂直尺度。

将式(7)代入方程(1)一(6),再对方程进行变换 以减少变量,并将其无量纲化后,取最低阶近似(忽 略Ω对r的导数项),得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(1 - \lambda z) \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \zeta - \zeta_0 \frac{\partial w}{\partial z} - (2w + r \frac{\partial w}{\partial r}) \lambda \Omega = 0$$
(8)

$$\frac{\partial}{\partial t} + \Omega (1 - \lambda z) \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^{3} w + \zeta_{0} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_{0}}{\partial z} \zeta - \nabla^{2} \theta_{se} = 0$$
(9)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega (1 - \lambda z) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla^2 \theta_{sc} - M^2 \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + 4 (\lambda \Omega)^2 w + S \nabla^2 w = 0$$
 (10)

其中 $S = \frac{D_0^2}{V_0^2} \hat{N}^2 = F^{-1} N^2$ 相当于里查逊数,这里 $F = \frac{V_0^2}{D_0}, \zeta = \frac{\partial}{r \partial r} r v_\theta - \frac{\partial v_r}{r \partial \theta}$ 为扰动涡度, $\zeta_0 = f + 2\Omega(1 - \lambda z)$ 为基本场角速度。 $M^2 = -\zeta_0 \Omega \lambda; \nabla^3 = \epsilon^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \epsilon = \frac{D_0}{r_0}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 。方程(8)—(10)与张可苏(1988)文中的式(2)对应。 λ 为垂直 切变参数。

由式(8)—(10)可以得到能量方程
$$\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial t} = \langle \overline{P}, P' \rangle - \langle P', K' \rangle$$

$$\begin{split} & \pm \psi \langle \overline{P}, P' \rangle = \frac{r}{N^2} (f + 2\Omega) \frac{\partial \Omega}{\partial z} \langle v_r \theta_{se} \rangle, \langle \overline{K}, K' \rangle = \\ & \frac{\partial \Omega r}{\partial z} \langle w v_{\theta} \rangle, \langle \overline{P}, K' \rangle = \langle w \theta_{se} \rangle_{\circ} \end{aligned}$$

从 $\langle \overline{P}, P' \rangle$ 的表达式可以看出,如果将其与张可 苏(1988)文中的式(7)比较,基本涡度由 f 变成了 f+2 Ω ,这时,在相同的基本流切变条件下,涡旋中的 平均有效位能向扰动有效位能的转换比平直气流下 要大得多。由下一节内容可以看到,在涡旋中,更容 易出现斜压不稳定。

侧边界条件(涡旋中心与边界处扰动为零)取为

 $(\zeta, w, \theta) = (\hat{\zeta}, iw, \hat{\theta}) J_m(\mu_i r) e^{im\theta}$ (11) 其中 $J_m(\mu_i r)$ 为 m 阶贝塞尔函数, μ_i 与贝塞尔的 m 阶数有关。m = 1表示涡旋中有偶极子。代入式 (8)—(10),两边同时乘以 $rJ_m(\mu_i r)$ 再对 r 求 0—1 上的带权重的积分平均,并利用贝塞尔函数在(0,1) 上关于权 r 的正交公式和利用分部积分法,得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(1 - \lambda z) im\right) \hat{\zeta} - \zeta_0 i \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} - \left(2 - \frac{1}{\mu_i}\right) \lambda \Omega \hat{w} = 0$$
(12)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(1 - \lambda z) im\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \epsilon^2 \mu_i^2\right) i\hat{w} + \zeta_0 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} \hat{\zeta} + \mu_i^2 \hat{\theta}_{se} = 0$$
(13)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(1 - \lambda z) im\right) \mu_i^2 \hat{\theta}_{se} + M^2 \left(\left(2 - \frac{1}{\mu_i}\right) i \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + im \hat{\zeta} \right) - 4(\lambda \Omega)^2 i\hat{w} + S\mu_i^2 i\hat{w} = 0$$
(14)

取

$$(\hat{\boldsymbol{\zeta}}, \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{se}}) = (\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\scriptscriptstyle 0}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\scriptscriptstyle 0}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{se0}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i} \boldsymbol{x} t}$$
 (15)

将式(15)代入方程组,然后将方程组在 z 方向离散 化,通过求矩阵的特征值问题来讨论方程的稳定性, 通过求相应的特征函数讨论扰动的结构。

3 方程组的特征值问题

在垂直方向上将区间[0,1]分为 *n* 层, 采用交 错网格,将 *w* 放在 0,1,2…*n* 层上;ζ、θ_s 放在 1/2,3/ 2…(2*n*-1)/2 层。 在所研究的问题范围内,可取径向尺度 $r_0 =$ 100 km; $D_0 = 4$ —10 km; $f^* = 0.370 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$; $V_0 =$ 100 m/s,这时, $\Omega_0 = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$,计算时取 n = 30,在 讨论的实际例子中由于所取水平尺度较大(不小于 100 km),这种垂直分辨率应该足够精确。将上述 结果代入式(12)—(14),得

$\sigma AX = PX$

σ为特征值,A、P是由基流参数f、S等组成的实矩 阵,X为定义在各离散点的特征向量 $ζ_{1/2}$, $θ_{sel/2}$, w_1 ……。通过求解矩阵特征值得到方程组的数值解, 从而求得扰动的特征值。

3.1 不同参数下的增长率

从扰动的相速度、增长率与各种参数的关系(图 1)可见:(1)当其他参数一定时,增长率与稳定度参 数之间的关系是, N² 越小时扰动增长率越大(图 la)。即潜热加热越强时,扰动增长越快。(2)其他 参数一定时,扰动增长率与基本流角速度之间的关 系是,当无量纲基本角速度从 0.1 增大到 0.2 时,增 长率增加较小,但当角速度从 0.2 增加到 0.8 时,增 长率变化较快,增长率随着基本流角速度的增大而 增大(图 1b);(3)切变系数越大,扰动的增长率也越 大(图 1c)。(4)由增长率与切向波数之间的关系 (图 1d)可见,增长率对切向波数不敏感,当取切向 波数 m 为 1—4 时,增长率都相近。

3.2 不同参数下的的相速度

由图 1 可以看出,在大部分参数范围内,扰动角 相速度都远远小于基本角速度,在很多情况下倒转, 这是这种扰动的一个重要特征。也可能正是所观测 到的涡旋中心附近的云团等并不随涡旋一起旋转的 原因之一。

4 扰动的结构

4.1 取不同稳定度参数下的扰动结构

从扰动的结构(图 2)可以看出:(1)当取 $N^2 =$ 0.8×10⁻⁴ s⁻¹,即没有潜热加热时,最大增长率约 为 0.002×10⁻³ s⁻¹, e 倍增长时间差约 6 d,增长缓 慢。扰动所对应的相角速度很小,为 - 0.045× 10⁻³ s⁻¹,扰动以极小的速度倒转。扰动结构沿基 本切向风方向随高度增加向后倾斜,这一结构由涡 旋中基本风场随高度增加线性减小决定。而且扰动





主要分布在中高层。(2)当取 N²=0.1×10⁻⁴ s⁻¹, 有潜热释放时,最大增长率为 0.048×10⁻³ s⁻¹, e 倍 增长时间 6 h。扰动所对应的相角速度为很小的负 值,扰动倒转。扰动结构沿基本切向风方向随高度 增加向后倾斜,倾角没有第一种情况下大,扰动集中 在中高层。由图可以看出,扰动的垂直运动正值区 与位温扰动的正值区配合较好,说明这时暖空气上 升,冷空气下沉,有效位能释放,扰动发展。另外,扰 动的正涡度区与正的垂直速度区也相对应。

4.2 取不同垂直尺度下的扰动结构

在层结稳定的情况下,如取 $\hat{N}^2 = 0.8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 当切变层尺度较小时(取垂直尺度 $D_0 = 4 \text{ km}$),扰动 增长率也将变得较大,为 0.047×10⁻³ s⁻¹,e 倍增长 时间 5 h。扰动所对应的相角速度值很小,且为负,扰 动倒转。扰动结构沿基本切向风方向随高度增加向 后倾斜,倾角比前面两种情况都要小,垂直速度也可 以伸展到 4 km(图 4)。由此可见,即使在无对流的情 况下,低层涡旋也有可能激发出重力波和对流。

5 高层反气旋的斜压不稳定及扰动结构

若将基本流 $\overline{V} = -\Omega \lambda zr$ 的形式代入方程组,则 它表示高层具有反气旋情形,若取 $D_0 = 8$ km,即表 示 8 km高度处有一反气旋环流,这时,在不同的稳定 度参数下,都可以出现不稳定现象,其结构如图5,







(m=2, N²=0.8×10⁻⁴ s⁻¹, λ=1, Ω₀=0.3×10⁻³ s⁻¹; growth rate=0.002×10⁻³ s⁻¹, phase velocity=-0.045×10⁻³ s⁻¹; solid line: positive value, dashed line: negative value;
Shadings: positive perturbations of equivalent potential temperature; a. Vertical velocity field, b. vorticity field)



图 3 扰动结构

(取 Ñ²=0.1×10⁻⁴ s⁻¹, m=2, λ=1, Ω₀=0.3×10⁻³ s⁻¹,
 这时增长率为 0.044×10⁻³ s⁻¹, 相角速度-0.086×
 10⁻³ s⁻¹; a. 垂直速度, b. 涡度, 实线为正, 虚线为负;
 阴影区为正的假相当位温扰动区)
 Fig. 3 Perturbation structure

 $(m=2, \hat{N}^2=0.1 \times 10^{-4} \, s^{-1}, \lambda=1, \Omega_0=0.3 \times 10^{-3} \, s^{-1};$ growth rate=0.044×10⁻³ s⁻¹, phase velocity=-0.086×10⁻³ s⁻¹; plotting convention as in Fig. 2;

a. Vertical velocity field, b. vorticity field)



从图可以看出,即使在通常的层结条件下,当高层有 反气旋环流时,也可以出现不稳定扰动,不过扰动发 展较慢,增长率为 0.005×10⁻³ s⁻¹,e 倍增长时间为 2 d,扰动相角速度小于基本场角速度。而且扰动在 低层反映明显。

图 6 是有凝结加热时的情形,这时增长率较大, 为 0.047×10⁻³ s⁻¹, e 倍增长时间为 6 h, 扰动以很 小的速度倒转。





troposphere is an anticyclone

 $(m=1, \hat{N}^2=0.1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \lambda=1, \Omega_0 = 0.25 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1};$ growth rate=0.047×10⁻³ s⁻¹, phase velocity=-0.138× $10^{-3} \text{ s}^{-1};$ plotting convention as in Fig. 2; a. Vertical velocity field, b. vorticity field)

6 结 论

文章从柱坐标下的斜压伊迪模式出发,研究了 热带涡旋中心的附近波不稳定问题,得到了某些有 趣的结果:(1)不管是低层的气旋性涡旋还是高层的 反气旋性涡旋,都容易出现斜压不稳定,出现重力内 波。(2)对于涡旋来说,由于斜压不稳定,能量向扰 动转换,使涡旋变得不对称。(3)在通常的稳定度参 数条件下,发展扰动主要集中在高层,当稳定度参数 很小时,扰动可扩展到整个对流层。

References

- Bao C L. 1980. Tropics Synoptic Meteorology(in Chinese). Beijing: Science Press. 150-151
- Huang Hong, Zhang Ming. 2008. Unstable dynamical properties of spiral bands in tropical cyclones. Acta Meteor Sinica(in Chinese), 66(1): 81-89
- Miller B I. 1967. Characteristics of hurricanes. Science, 157:1389-1399
- Tao Jianjun, Li Chaokui. 2008. The theory study on unstable spiral wave in the circular vortex. Chinese J Geophy, 51(3), 650-656
- Teng Daigao, Luo Zhexian, Li Chunhu, at al. 2008. Typhoon vortices self-organization in a baroclinic environment. Acta Meteor Sinica(in Chinese), 66(1): 71-80
- Wang Z L, Fei L. 1987. The Forecast Handbook about Typhoon(in Chinese). Beijing: China Meteorology Press. 1-111
- Wei Dingwen, Gray W M. 1988. Multi-criterion combinatorial theory tropical cyclone formation. Scientia Atmospherica Sinica (in Chinese),12(2):200-207
- Yu Zhenshou, Gao Shouting, Ren Hongxiang, at al. 2007. A numerical study of the severe heavy rainfall associated with the typhoon Haitang. Acta Meteor Sinica(in Chinese), 65(6): 864-876
- Zhang Kesu. 1988. On mesoscale instability of a baroclinic flow 1: Symmetric instability. Acta Meteor Sinica (in Chinese), 46(3): 258-266

附中文参考文献

- 包澄澜.1980.热带天气学.北京:科学出版社,150-151
- 黄泓,张铭.2008. 热带气旋螺旋云带动力不稳定的性质. 气象学 报,66(1): 81-89
- 陶建军,李朝奎.2008. 流体涡旋中螺旋波不稳定发展的理论研究. 地 球物理学报.51(3):650-656
- 滕代高,罗哲贤,李春虎等.2008. 斜压大气中台风涡旋自组织的研 究. 气象学报,66(1):71-80
- 王志烈,费亮.1987 台风预报手册.北京:气象出版社,1-111
- 魏鼎文, Gray W M. 1988. 热带气旋形成的多尺度组合理论. 大气 科学, 12(2): 200-207
- 余贞寿,高守亭,任鸿翔.2007.台风"海棠"特大暴雨数值模拟研究. 气象学报 65(6):864-876
- 张可苏.1988. 斜压气流的中尺度稳定性 I:对称不稳定. 气象学报, 46(3):258-266